# DE' CONTORNI

DELLE

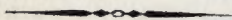
# OMBRE ORDINARIE.

# DE' CONTORNI
DELLE
# OMBRE ORDINARIE

## *TRATTATO*

DI

A. BORDONI

GIÀ PROF. NELLA C. R. SCUOLA MILITARE DI PAVIA
ED UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETÀ ITALIANA
DELLE SCIENZE.

MILANO
DALL' IMPERIALE REGIA STAMPERIA
1816.

Tunc enim ars perfecta est, cum natura esse videtur; natura autem nihil errat, cum artem latenter adjunctam habet.

LONGINO. Cap. XXII.

# INDICE

## DELLE COSE CONTENUTE IN QUEST' OPERA.

### PARTE PRIMA.



### PARTE SECONDA.

## PARTE TERZA.



## PARTE QUARTA.

---

| Pag. | lin. | ERRORI. | CORREZIONI ED AGGIUNTE. |
|---|---|---|---|
| 5 | 10 | *FM* | *GM* |
| 6 | 3 | di luce, ha tutti | di luce e lo spigolo *rh* all' asse *ML*, ha tutti |
| 7 | 24 | di luce, e per una | di luce ( le rette generatrici sono quelle per cui passa la suddetta generatrice ), e per una |
| 8 | 36 | l' icnografia | l' icnografico |
| 9 | 25 | all' asse *ML*, | al piano icnografico, |
| | 32 | icnografico od all' ortografico | ortografico |
| 13 | 20 | in *S* | in *I* |
| 15 | 22 | $c^2 r^2 +$ | $s^2 r^2 +$ |
| 16 | 32 | $(r^2 - b^2) : , = r \sqrt{\frac{2}{3}}$ | $(r^2 - b^2)\, cs : , = \frac{1}{2} r \sqrt{\frac{2}{3}}$ |
| | 34 | la *CM* | la prima *CM*, e l' altra $\frac{1}{2}$ *CM* |
| 20 | 31 | *rR* | *rN* |
| 27 | 40 | *SgU*, | *SgU*, si estenda la *Ch* in *g*, |
| 32 | 27 | o la | o della |
| 34 | 36 | *IAN* | *IAX* |
| 35 | 12 | *R* | *P* |
| 40 | 21 | ( fig. 25 ) | ( fig. 29 ) |
| | 31 | *Vx*, -- ed eguali | *Vx*, -- paralelle alla *fF*, ed eguali |
| 42 | 29 | $2abxz + (1 + b^2)\, x^2$ | $2axz + (a^2 + b^2)\, x^2$ |
| | 31 | $2abxy + (1 + a^2)\, y^2$ | $2bxy + (a^2 + b^2)\, y^2$ |
| 45 | 8 | verso il | pel verso opposto al |
| 59 | 32 | $z + x - y = 0$ | $x = 0$ |
| 61 | 11 | ed ai | e dai |
| 65 | 9 | l' icnografia | le icnografie |
| 66 | 13 | *TV*, e congiunta | *TV*, unita *CPS*, e congiunta |
| 67 | 35 | secondo | primo e secondo |
| 72 | 15 | o sia $2 \cdot FB$ | o sia *FB* |
| 80 | 18 | *AB*; | *AB*, come si è già detto; |
| 91 | 20 | in vece di *t*, *s*, *u* | si legga *x*, *y*, *z* |
| 94 | 36, 45 | al Δ | al complemento del Δ |
| 95 | 4 | anch' esso al Δ | al Δ |
| 113 | 5 | verticale, come | verticale, e che la generatrice passi costantemente per l' asse stesso, come ( altrettanto si aggiunga al lemma 31 ) |
| 125 | 25 | $\sqrt{14,25}$ | $\sqrt{13,75}$ |
| 126 | 18 | $\frac{1}{3}\sqrt{1013}$ | $\frac{1}{3}\sqrt{913}$ |
| | 26 | e però della seconda delle medesime due distanze. | e però i medesimi punti saranno fuori della periferia immaginata. |
| 133 | 17 | *on* | *ou* |
| 135 | 4 | Prima del n.° 5 si ponga questa Oss. Se una porzione dell' estremo dell' ombra portata dall' ovolo cadesse sulla listella *DE*, l' ortografia di esso si troverebbe col fare per la *DE* ciò che si è fatto per *FE*. | |
| 140 | 2 | *cv* | *nv* |
| | 6 | $V - v$ ed il raggio | $V - v$ il piano perpendicolare all' ortografico ed il raggio |
| 143 | 33 | lati, sono | lati, si suppongono interamente |
| 146 | 32 | *sj* — | OΔ — |
| 151 | 13 | sarebbe composto | sarebbe in generale composto |
| 156 | 6 | *tB* | *fB* |
| nella fig. 48 | | in vece della *z* leggasi *x*. | |
| 146 | | in vece della *P* posta a destra della *S* si legga *R*. | |
| 153 | | *a* indica il segamento delle rette *LM*, *Aa*. | |

# PARTE PRIMA.

## DEFINIZIONI E NOZIONI GENERALI.

I.

Per rispondere a più dimande che mi furono fatte sui contorni delle ombre, lessi tutte le opere pubblicate intorno ai medesimi; e non avendo trovato quanto aveva bisogno onde soddisfare adequatamente alle dimande stesse, tentai di supplirvi colle mie ricerche, e conseguii di fatto felicemente tutto quello che all' uopo desiderava; anzi ebbi la sorte di scoprire delle regole esatte e tanto semplici per delineare i contorni di alcune ombre ordinarie, che le persone, dalle quali vennero fatte le dimande suddette, mi animarono a pubblicarle per vantaggio delle belle arti.

Aveva già divisato di far questo con brevi memorie, ma essendomi in quel tempo nato un pressante bisogno di aver pronto un lavoro di cose elementari ed utili immediatamente alle belle arti, mi posi all' ardua impresa di pubblicare un Trattato sui Contorni delle Ombre ordinarie, e soddisfare in tal guisa insieme al mio bisogno anche il lodevole desiderio mostrato in più occasioni da varj architetti e disegnatori, non che a quello delle persone suddette; ed affinchè mi riescisse meno imperfetto, osservai quali erano le *superficie semplici* costituenti le ortografie, le icnografie, i profili, ecc. delle fabbriche commendate dai più grandi architetti, e trovai le ombre di quelle fra queste superficie, a cui non aveva ancora pensato, e poscia di alcune altre composte di queste medesime superficie semplici, e che s' incontrano spessissime volte nell' architettura; e da tutto ciò ne emerse il presente trattato.

Quantunque alcune proposizioni, che costituiscono questo trattato, furono già pubblicate dagli autori che io cito alla fine di esso, ciò non ostante, siccome le soluzioni o regole ch' essi danno, sono generalmente molto complicate, ed alcune anco errate; così ho divisato di trattare queste poche proposizioni come le nuove: anzi nel principio aveva fissato di esporre di

mano in mano, dopo le mie regole, anco le medesime regole errate, onde mostrarle ai giovani disegnatori, affinchè non le usassero; ma siccome con ciò sarebbesi ingrossato assai di più questo libro, e per accidentalità le stesse regole errate sono più complicate di quelle che io do delle medesime proposizioni; pertanto abbandonai questo pensiero, persuaso che i giovani stessi, pei quali unicamente io scrivo, preferiranno ognora le mie regole a quelle, riunendosi nelle mie, oltre una maggior semplicità, anche l'esattezza, che io spero di non avere giammai perduto di vista.

Il lettore che si sarà impossessato bene delle regole che do in questo trattato, sarà in istato di segnare i contorni delle ombre anco pei corpi non soggetti a leggi geometriche definibili, come sono le foglie, gli ovoli e simili ornati, sempre che egli conosca le loro vere dimensioni.

2.

Un corpo che impedisce il passaggio ai raggi di luce, produce un'ombra, la quale si discerne sulla superficie del corpo stesso o su quella di altro corpo, ovvero in amendue questi modi. L'ombra visibile sul corpo medesimo, che impedisce il passaggio alla luce, si chiamerà *ombra propria*; e l'altra, cioè quella che scorgesi sulla superficie del corpo immerso nello spazio per cui passerebbero i raggi di luce arrestati dal primo, si dirà invece *ombra portata*; ed *ombre composte* si denomineranno quelle formate dalla unione di due o più ombre proprie ovvero portate, oppure di alcune proprie e di alcune portate.

Prescindendo dalla *diffrazione* della luce, le qualità di un corpo che influiscono sul contorno della sua ombra propria, sono la figura e la grandezza di esso, e la sua posizione relativamente alla direzione dei raggi di luce; e quelle da cui dipende il contorno di un'ombra portata, sono le figure e grandezze dei due corpi, la loro posizione relativa, non che la posizione di essi rispetto ai raggi medesimi. Di modo che, ammesso i raggi di luce fra loro paralelli, come *sono effettivamente per le ombre ordinarie*, i contorni delle ombre, qualunque esse siano, saranno affatto individuati, qualora individuate siano le dette qualità dei corpi ed una paralella ai raggi medesimi.

Essendo molte le proposizioni che costituiscono questo trattato, onde procacciargli la maggior chiarezza possibile, ho diviso il medesimo in quattro parti: nella prima, ch'è la presente, espongo le definizioni e le nozioni generali necessarissime per l'intelligenza del medesimo; nella seconda parlo de' contorni delle sole ombre proprie; nella terza di quelli delle ombre portate; e nella quarta ed ultima parlo de' contorni delle ombre composte.

Così, onde soddisfare anche chi desidera conoscere le regole, e non ha tempo di vedere le loro dimostrazioni, generalmente dichiaro subito dopo l'enunciato di ciascuna proposizione le regole per la soluzione di essa: come per facilitare la lettura di tutto il trattato, e risparmiare di cercare altrove, e forse in vano gli erudimenti necessarj per intenderlo, ho riunito in una nota posta alla fine di esso varie proposizioni puramente geometriche, le quali sono in generale altrettanti lemmi di altre proposizioni esposte nel trattato medesimo.

3.

Per rappresentare i punti, le linee e le superficie situate comunque nello spazio, seguendo gli artisti, immaginerò due piani fissi nello spazio medesimo, l'uno orizzontale, e l' altro verticale e posto dinanzi ed a fronte del lettore; e per evitare la confusione nominerò *piano icnografico* l'orizzontale, ed *ortografico* il verticale.

Il piede della perpendicolare tirata al piano ortografico da un punto posto comunque nello spazio si chiamerà *ortografia* di esso punto, e quello della perpendicolare condotta dal medesimo punto al piano icnografico si nominerà *icnografia* del punto stesso; ed esso punto dirassi *obbiettivo*.

Così, se da tutti i punti di una linea situata in qualunque modo nello spazio tireransi le perpendicolari al piano ortografico, la linea costituita dalla serie dei piedi di esse perpendicolari denominerassi *ortografia* della medesima linea, la quale verrà detta *obbiettiva*; come si chiamerà *icnografia* la linea nella quale saranno i piedi di tutte le perpendicolari condotte al piano icnografico dai punti della stessa obbiettiva.

4.

*Individuato è quel punto obbiettivo che ha un' ortografia ed icnografia data.* Poichè tirando per l' ortografia di esso la perpendicolare al piano ortografico, e per la icnografia la verticale, in ambedue queste rette si deve trovare il punto obbiettivo, e però dovrà essere nel punto comune alle medesime, il quale è solo ed individuato.

*Similmente sarà pure data ed individuata generalmente la linea obbiettiva, che avrà una data ortografia ed una data icnografia.* Imperciocchè, se una retta si moverà, conservandosi perpendicolare al piano ortografico, e segando continuamente l' ortografia data, essa genererà una superficie, nella quale vi sarà la linea obbiettiva: così se una retta verticale moverassi in un modo simile lungo l' icnografia, essa descriverà una superficie, in cui pure si troverà la stessa obbiettiva. Quindi, dovendo essere la medesima obbiettiva in amendue queste superficie, sarà essa la loro intersecazione; e però sempre individuata, a meno che le due superficie immaginate coincidano fra loro, ciò che succede nel solo caso in cui sia una retta linea sì l' ortografia che

l'icnografia, più ambedue perpendicolari alla comune intersecazione dei piani ortografico ed icnografico.

In questo caso particolarissimo volendo pure rappresentare individualmente la linea obbiettiva, s'immaginerà un secondo piano verticale e perpendicolare alla sezione dell' ortografico ed icnografico, e si farà su di esso ciò che si è indicato pel piano ortografico ed icnografico per avere le ortografie ed icnografie. Vale a dire, da tutti i punti della linea obbiettiva tireransi delle perpendicolari a questo piano; e si avrà nella serie dei piedi delle medesime una linea, la quale insieme o alla ortografia oppure alla icnografia farà conoscere individualmente l' obbiettiva.

La linea descritta in tal guisa in questo nuovo piano, detto comunemente *piano de' profili*, si chiamerà *profilo* della obbiettiva; l'ortografia, l'icnografia ed il profilo si diranno in generale *projezioni rette* od *ortogonali* della stessa obbiettiva; ed i piani ortografico, icnografico e dei profili, *piani coordinati.*

5.

Il bisogno che ebbero molte volte gli artisti di disegnare le ortografie ed i profili nel piano icnografico esteso sufficientemente, fece ad essi immaginare che la parte del piano ortografico in cui vi erano disegnate le ortografie, e quella del piano de' profili, nella quale vi erano i profili medesimi, si fossero adattate a quelle parti del piano icnografico non per anco occupate da icnografie, col rotare attorno alle rispettive sezioni di essi piani e dell' icnografico.

Tutte le volte che nell' esporre o dimostrare qualche proposizione avrò bisogno contemporaneamente della ortografia ed icnografia, ovvero della icnografia e del profilo, in generale di due o più di queste projezioni, io seguirò a capello questa massima ampiamente conosciuta dai disegnatori; cioè che i piani ortografico e dei profili siansi adattati all' icnografico, rotando intorno alle rette comuni a ciascuno di essi ed all' icnografico medesimo: avrò però sempre il riguardo d' indicare queste rette comuni, le quali si chiameranno *assi*, e di supporre, specialmente quando farò dei ragionamenti, i medesimi due piani ortografico e dei profili, non che le figure disegnate in essi, nelle loro vere posizioni primitive.

6.

*Data l' ortografia e l' icnografia di una retta paralella ai raggi di luce, trovare gli angoli che essa fa coi piani ortografico, icnografico e dei profili, non che il profilo di essa medesima.*

Sia $AC$ ( fig. 1 ) l' icnografia , ed $aC$ l' ortografia della retta paralella ai raggi di luce; $ML$ l' asse attorno al quale ha rotato il piano ortografico per adattarsi all' icnografico, come sopra si è detto; ed $FM$ sia quello attorno cui ha rotato il piano de' profili per disporsi nel medesimo icnografico.

Si conduca $ABa$ perpendicolare all' asse $ML$; indi si prenda $BL$ eguale alla $AC$, uniscasi $aL$, e sarà $aLB$ eguale all' angolo fatto col piano icnografico dalla paralella ai raggi di luce: si faccia $BE$ eguale alla $Ca$, congiungasi $AE$, ed $AEB$ eguaglierà l' angolo che fa la medesima retta col piano ortografico. Così, presa $MF$ eguale alla $AB$, e tirata $FG$ perpendicolare all' asse $FM$ ed eguale alla $Ba$, e congiunta $FM$, avrassi in questa il profilo della paralella ai raggi di luce; e segata $BH$ eguale alla $GM$, indi congiunta $CH$, l' angolo risultante $BHC$ sarà eguale a quello fatto dalla medesima retta paralella ai raggi di luce col piano dei profili.

Si costruisca il paralellepipedo rettangolo $nhm$ ( fig. 2 ), il quale abbia i lati $rn$, $rh$, $rm$ eguali rispettivamente alle rette $AB$, $BC$, $Ba$, ed uniscansi le $hl$, $hn$, $hm$ ed $lr$.

Ponendo questo paralellepipedo sul piano icnografico, ed in modo che lo spigolo $nr$ cada nella retta $AB$, l' $rh$ sulla $BC$, e la $rm$ superiormente al piano icnografico stesso, la retta $hl$ coinciderà colla paralella ai raggi di luce, la $hm$ coll' ortografia della medesima, e la $hn$ coll' icnografia; e però in questa posizione sarà $rl$ paralella al profilo della medesima retta paralella ai raggi di luce, e gli angoli $lhn$, $lhm$, $hlr$ eguaglieranno quelli fatti da essa retta coi piani icnografico, ortografico e dei profili.

Ma essendo $AB$ eguale alla $lm$, e le $BE$, $aC$, $hm$ pure eguali fra loro, si ha l' angolo $AEB$ eguale all' $lhm$; e per essere $Ba$ eguale alla $nl$, e $BL$ all' $hn$, i triangoli $aBL$, $nlh$ danno l' angolo $aLB$ eguale all' $lhn$. Adunque i due angoli $AEB$, $aLB$ eguaglieranno anch' essi, siccome ho asserito, gli angoli fatti dalla paralella ai raggi di luce coi piani ortografico ed icnografico.

Così per essere eguali sì le $MF$, $AB$ che le $FG$, $Ba$, sarà $GM$ il profilo cercato; ed essendo eguali le $BH$, $GM$, $lr$ e le due $BC$, $rh$, gli angoli $BHC$, $hlr$ saranno essi pure eguali; e però $BHC$ eguaglierà anch' esso l' angolo che fa la paralella ai raggi di luce col piano dei profili.

Corollario. Per determinare la $Ca$ ortografia della paralella ai raggi di luce, quando si conosca $AC$ sua icnografia, e l' angolo che fanno i raggi medesimi col piano icnografico: dopo avere condotta $ABa$ perpendicolare alla $ML$, e segata $BL$ eguale alla $AC$, si costruirà l' angolo $BLa$ eguale a quello che fanno i raggi di luce col piano icnografico, e congiungerassi la $Ca$; e questa sarà l' ortografia dimandata. Così, se fosse data $Ca$ ortografia della paralella ai raggi di luce, l' angolo fatto da essi col piano ortografico, e si volesse l' icnografia della medesima paralella, si farebbe la $BAa$ perpendicolare alla $ML$, $BE$ eguale alla $Ca$, l' angolo $BCA$ eguale al dato; e nella retta $AC$ avrebbesi l' icnografia dimandata, siccome è evidente.

7.

Nella ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione che fissano generalmente i disegnatori, la quale si dirà *direzione ordinaria*, il paralellepipedo *nmhl*, la cui diagonale *hl* è paralella ai raggi di luce, ha tutti i lati eguali, o sia è desso un cubo; e però in tale ipotesi gli angoli *nhr*, *mhr*, *lrn* ed i loro eguali *ACB*, *aCB*, *GMF* saranno semiretti o sia di quarantacinque gradi; ed i tre *lhm*, *lhn*, *hlr*, che i raggi fanno coi tre piani coordinati, saranno di gradi trentacinque e sedici minuti primi prossimamente.

8.

In tutto questo trattato, per evitare una stucchevole ripetizione, quando il bisogno non richiederà altrimenti, intenderò colla lettera *O* l' ortografia, e colla *I* l' icnografia di una paralella ai raggi di luce, colle $\Sigma$ e $\Delta$ gli angoli *aLB*, *AEB* fatti da essa coi piani icnografico ed ortografico, colla $\Gamma$ l' altro *FGM*, e colla retta *ML* costantemente la comune sezione o l' asse dei medesimi due piani ortografico ed icnografico: così molte volte dirò di condurre delle rette, ma per conservar chiare le figure segnerò i soli termini o due o più punti qualunque di esse.

# PARTE SECONDA.

## DE' CONTORNI DELLE OMBRE PROPRIE.

UNA retta che si muova conservandosi paralella ai raggi di luce, e toccando la superficie di un corpo, senza punto segarla, genera una superficie, la quale tocca tangenzialmente quella del corpo stesso nel contorno dell' ombra propria del medesimo. La superficie generata in tal guisa dalla retta paralella ai raggi di luce si chiamerà costantemente *superficie involvente.*

Da questa semplicissima verità per sè stessa evidente, e da ciò che si è detto nella parte antecedente, ne discende che qualsisia quistione relativa alla delineazione dei *contorni* delle ombre proprie equivale alla seguente di pura geometria: *Data la superficie di un corpo ed una retta paralella ai raggi di luce, trovare la linea di contatto fra essa superficie e la involvente suddetta*; e questa sarà appunto la proposizione che io tratterò in questa parte per ciascuna di quelle superficie che s' incontrano nelle belle arti, particolarmente nell' architettura.

### DE' CONTORNI

#### DELLE OMBRE PROPRIE DELLE SUPERFICIE CILINDRICHE.

Una retta che si muova mantenendosi costantemente paralella ad una data, genera una superficie che si chiama *cilindrica.* La retta mobile generante la superficie dicesi *retta generatrice* di essa superficie. Così una linea, la quale sia incontrata costantemente dalla retta generatrice in tutte le posizioni per cui passa generando la superficie cilindrica, chiamasi *direttrice* della medesima superficie. La superficie denominata or ora involvente è una superficie cilindrica che ha le rette generatrici paralelle ai raggi di luce, e per una delle direttrici il contorno dell' ombra propria.

Le sezioni fatte da una superficie qualunque ai piani coordinati diconsi *tracce* della medesima superficie, e particolarmente traccia ortografica quella fatta al piano ortografico, ed icnografica quella fatta al piano icnografico. Le tracce di una superficie cilindrica sono anche sue direttrici.

Così si chiamerà ortografia ed icnografia della superficie di un corpo lo spazio racchiuso dall' intersecazione fatta al piano ortografico ed icnografico, dalla superficie cilindrica che toccherà tangenzialmente quella del corpo stesso, come la involvente suddetta, ed avrà le rette generatrici perpendicolari ai piani coordinati medesimi. Similmente si chiameranno varie volte ortografia ed icnografia di una porzione di qualunque superficie le parti dei piani ortografico ed icnografico racchiuse dalle linee esprimenti l' ortografia e l' icnografia dei lembi di essa superficie.

Per indicare un punto, una linea, una superficie di cui siano figurate l' ortografia e l' icnografia, od in generale due sue projezioni, scriveransi queste projezioni l' una dopo l' altra e separate da una lineetta orizzontale. Ad esempio, per indicare il punto, la linea, la superficie che hanno le ortografie in $C$, $CD$, $ABC$, e le icnografie in $c$, $cd$, $abc$, scriverò $C-c$, $CD-cd$, $ABC-abc$.

Siccome una superficie cilindrica è affatto individuata, qualora lo sia una sua direttrice ed una paralella alle sue rette generatrici; così per individuare una di queste superficie indicherò una paralella alle rette sue generatrici ed una sua direttrice, la quale sarà generalmente una delle tracce della medesima superficie.

## PROPOSIZIONE I.

*Data la traccia icnografica di una superficie cilindrica, l' ortografia e l' icnografia di una retta sua generatrice, trovare l' ortografia e l' icnografia del contorno dell' ombra propria della superficie medesima.*

Siano $AB$, $ab$ ( fig. 3 ) l' icnografia e l' ortografia di una retta generatrice della superficie cilindrica, ed $ACF$ sia la traccia data di essa.

Si conduca $HL$ paralella alla $I$, ed $Lh$ alla $O$; si faccia $Hh$ perpendicolare all' asse $ML$, e dai punti $H$, $h$ tirinsi le $HN$, $hn$ paralelle rispettivamente alle $AB$, $ab$; e dal punto $n$, dove la $hn$ sega $ML$, conducasi $nN$ perpendicolare alla stessa $ML$, e si estenda sino in $N$ ad incontrare cioè $HN$; indi si congiunga $LN$, e si determini $C$ punto di contatto fra la traccia $ACF$ e la $CD$ sua tangente paralella alla $NL$: fatto ciò, si tiri la $Cc$ perpendicolare alla $LM$, e conducansi le $CE$, $ce$ paralelle rispettivamente alle $AB$, $ab$; e queste $CE$, $ce$ saranno l' icnografia e l' ortografia di una retta facente parte del contorno dell' ombra propria della superficie cilindrica.

S' immagini il piano delle rette $HN-hn$, $HL-hL$, e quello delle $CE-ce$, $CD$; il primo di questi piani segherà l' icnografia nella $LN$, e l' altro nella stessa $CD$; e però saranno fra loro paralelli, perchè le rette $CE-ce$, $CD$ sono rispettivamente paralelle alle $HN-hn$, $LN$.

Ma il piano delle $CE - ce$, $CD$ è tangente la superficie cilindrica, giacchè passa per la retta $CE - ce$ generatrice, e per la $CD$ tangente la traccia $ACF$; ed è paralello ai raggi di luce, per esserlo al piano delle $HN - hn$, $HL - hL$, nel quale vi è la $HL - hL$.

Adunque lo stesso piano delle $CE - ce$, $CD$ rappresenterà, in questo caso, la superficie involvente. Quindi la retta $CE - ce$, lungo la quale esso piano tocca tangenzialmente la superficie cilindrica, sarà nel contorno dell' ombra propria di questa superficie medesima; e conseguentemente nelle rette $CE$, $ce$ avransi l' icnografia e l'ortografia dimandate; come dovevasi dimostrare.

Ciò che si è fatto pel punto di contatto $C$, si dica per gli analoghi $H$, - - a cui corrispondono altre tangenti $HI$, - - della traccia $ACF$ paralelle anch' esse alla $LN$; e si avranno le $HP$, $hp$, - - per projezioni di altre rette generatrici, estremi dell' ombra propria della superficie cilindrica.

Osservazione 1. Per la figura che hassi sott' occhio, ammessi i raggi di luce diretti da $H - h$ verso $L$, gli spazj che dovransi acquerellare, saranno, nell'ortografia $cesr$, e nell' icnografia $HPVS$, le rette $Rr$, $SV$ essendo amendue tangenti la traccia $ACF$, e la prima perpendicolare alla $LM$, e la seconda paralella alla $AB$.

Nella stessa ipotesi, per la direzione dei raggi di luce, se la traccia $ACF$ non avrà tangenti, le quali siano paralelle alla retta $NL$, l' ortografia e l' icnografia della superficie cilindrica saranno tutte illuminate o tutte in ombra. Così, se coincidessero i due punti $N$, $L$, nel qual caso evidentemente si confonderebbero le rette $HL - hL$, $HN$, $hn$, o sia sarebbero i raggi di luce paralelli alle generatrici della superficie cilindrica, la costruzione lascerebbe la quistione indeterminata, appunto come richiederebbe in tal caso la natura medesima di essa.

Corollario. Se le projezioni della retta generatrice la superficie cilindrica saranno perpendicolari all' asse $ML$, il punto $N$ cadrà nell' $H$, e però la $LN$ si confonderà colla stessa $HL$. Quindi le tangenti $CD$, $HI$,- -, le quali determinano i punti $C$, $H$, - -, dovranno essere paralelle alla $HL$ icnografia di una retta paralella ai raggi di luce; e per questo, nella ipotesi ordinaria della direzione dei raggi di luce, le $CD$, $HI$, - - tangenti la traccia faranno angoli semiretti colla $ML$.

Egli è evidente che questo corollario si estende anche agli altri casi, pure frequentissimi in pratica, delle rette generatrici la superficie cilindrica perpendicolari al piano icnografico od all' ortografico.

Osservazione 2. Quando le rette generatrici della superficie cilindrica saranno paralelle alla $LM$, converrà conoscere la sua traccia nel piano dei profili; ed in questo caso si determineranno i punti analoghi ai $C$, $H$, - -, come ho detto nel corollario esposto. Ad esempio: sia $vu$ (fig. 4) la traccia nel piano dei profili, ed $FSVG$, $absr$ l' icnografia e l' ortografia della medesima superficie, ed $M$ il profilo di una retta paralella ai raggi di luce; ed $LM$, $Lr$ siano i due assi, attorno cui hanno rotato i due piani ortografico e dei profili per adattarsi all' icnografico.

Condotte le tangenti $vt$, $ux$, - - paralelle alla $M$, si prenderanno le $LH$, $LC$, - - eguali rispettivamente alle orizzontali $hu$, $cv$, - -, e si condurranno le $CE$, $HP$, $vce$, $uhp$, - - paralelle alla $LM$; e queste saranno le projezioni dei contorni dell' ombra.

Nella ipotesi che i raggi di luce siano diretti come nell' antecedente osservazione, gli spazj $SVPH$, $ceba$ saranno quelli che dovransi ombrare.

Osservazione 3. Ciò che ho detto, conoscendosi la traccia icnografica della superficie, si estende al caso che la traccia data sia l' ortografica, e tutto senza il minimo cambiamento notabile.

Osservazione 4. Per alcune fra le superficie cilindriche che s' incontrano nelle belle arti, in vece di una traccia di esse, sono date le projezioni di una loro direttrice comunque posta nello spazio: volendo estendere il metodo esposto alla determinazione dell' ombra propria di queste superficie, converrà primieramente trovare una traccia di esse: veggasi per questo il lemma primo.

## DE' CONTORNI

### DELLE OMBRE PROPRIE DELLE SUPERFICIE CONICHE.

Si chiamerà superficie conica quella generata da una retta, che si muove passando costantemente per un dato punto individuato. La retta che genera questa superficie, si dirà *retta generatrice* di essa superficie; come il punto individuato, per cui passerà costantemente questa retta, dirassi *vertice* della medesima superficie.

Una linea, la quale sia incontrata costantemente dalla retta generatrice di una superficie conica, e consegentemente esistente nella superficie stessa, si chiamerà *direttrice* della medesima superficie. Le tracce di una superficie conica sono anche direttrici di essa.

È affatto individuata quella superficie conica che ha un dato punto per vertice, ed una data linea per direttrice; si potrà adunque scrivere geometricamente, come farò, una superficie conica, scrivendo il suo vertice ed una sua direttrice, la quale sarà generalmente una sua traccia.

## PROPOSIZIONE II.

*Data la traccia icnografica di una superficie conica e le projezioni del suo vertice, trovare l' ortografia e l' icnografia del contorno dell' ombra propria della medesima superficie.*

Siano $C, c$ (fig. 5) l' icnografia e l' ortografia del vertice della superficie conica, ed $AB$ sia la traccia di essa medesima.

Si traccino le rette $CD, cd$ rispettivamente paralelle alle $I, O$; si tiri $dD$ perpendicolare alla $LM$, e dal punto $D$ la $DT$ tangente alla traccia $AB$: fatto ciò, tirisi dal punto di contatto $D$ la retta $Tt$ perpendicolare alla $LM$, e congiungansi le rette $TC, tc$; e queste ultime due saranno l' icnografia e l' ortografia dimandate.

Il piano delle rette $CT-ct$, $DT$ sarà tangente la superficie conica, per essere $CT-ct$ una generatrice di essa, e la $DT$ tangente la traccia $AB$; e passerà per la retta $CD-cd$ paralella ai raggi di luce, perchè passa pei punti $C-c$, $D$ di essa.

In questo piano tangente la superficie s' immaginino quante rette si vogliono paralelle alla $cd-CD$; risulteranno esse paralelle ai raggi di luce e tangenti la superficie

conica medesima; e per conseguenza questo piano sarà la superficie involvente, ed i punti di contatto fra esso piano e la superficie conica apparterranno all' estremo dell' ombra di cui si parla. Ma questi punti sono nella retta *ct* — *CT*; adunque nelle medesime projezioni *CT*, *ct* avransi l' icnografia e l' ortografia dimandate; come ecc.

Altrettanto si direbbe se la traccia data fosse l' ortografica.

Osservazione 1. Se dal punto *D* si potranno condurre più tangenti *DT*, *DV*, - - alla traccia *AB*, si dirà di una qualunque di esse ciò che ho detto della *DT*. Così le rette *CV*, *cv*, - - saranno le projezioni di un' altra retta generatrice della superficie conica, altro estremo dell' ombra propria della medesima superficie.

Osservazione 2. Se i raggi di luce saranno diretti come nella prima osservazione della proposizione antecedente, la porzione in ombra della superficie conica sarà quella avente per icnografia *TBVC*, e per ortografia *vcbt*, supposto *Bb* perpendicolare alla *LM* e tangente la traccia *AB*; e però si dovrà ombreggiare, del piano icnografico la parte *TBVC*, e dell' ortografico la sola porzione *bct*, giacchè la rimanente *vcb* resta coperta dalla stessa superficie conica.

Osservazione 3. Quando risulterà *cd* paralella alla *LM*, ciò che accadrà allorchè i raggi di luce saranno orizzontali, il punto *D* troverassi ad una distanza infinita dal *C*; e però le tangenti *TD*, *VD*, - - risulteranno paralelle alla stessa *CD*. In questo caso adunque, per avere i punti di contatto *T*, *V*, - - onde determinare le projezioni del contorno dell' ombra propria della superficie conica, basterà condurre le tangenti della traccia icnografica *AB* paralelle alla *I*.

Osservazione 4. Se dal punto *D* non si potranno tirare delle tangenti la traccia *AB*, non vi saranno estremi d' ombre proprie, e però la superficie interamente illuminata od in ombra. Evidentemente avrà sempre luogo questa eccezione, quando la traccia della superficie conica sarà rientrante e convessa, e che il punto *D* cadrà dentro dello spazio racchiuso da essa traccia.

Come per le superficie cilindriche, così per le coniche, alcune volte, in vece di essere data una traccia, sono conosciute le projezioni di una direttrice; e però volendo determinare l' ortografia e l' icnografia delle loro ombre proprie colla regola esposta, bisognerà trovare prima una traccia di esse: ciò si farà col lemma secondo.

Osservazione 5. Le superficie coniche più comuni nelle arti sono di coni retti ordinarj, che hanno per una direttrice la periferia di un cerchio orizzontale, e gli assi verticali; e generalmente si ha di mira il disegno della sola ortografia.

Sebbene la regola esposta per trovare l' ortografia dell' ombra propria di una superficie conica valga per queste particolari superficie, come per qualunque altra, nulladimeno espongo per esse la regola seguente, la quale in sostanza è la stessa generale, colle modificazioni però che permette la superficie particolare insieme alla proprietà di essere perfettamente eguali fra loro le ortografie di una stessa figura, qualora siano fatte sopra piani paralelli.

L' ortografia della superficie conica disegnata nel piano che passa per l' asse di essa superficie sia *ABC* (fig. 6).

Si tiri la *BE* paralella alla *O*, e dal punto *E* conducasi la *EF* perpendicolare alla *LM*, e dal *D* centro della base tirisi *DF* paralella alla *I*, ed otterrassi la retta terminata *DF*: fatto ciò, col centro *G*, punto di mezzo della *DF*, e col raggio eguale alla *DG* descrivasi l' arco circolare $y$, e col centro *D* e raggio *DC* si descriva l' arco $x$; e dal segamento *O* di questi archi conducasi *OP* perpendicolare alla *ML* asse: congiunta *BP*, sarà questa l' ortografia dimandata.

Imperciocchè essendo $D$, $O$ ed $F$ punti equidistanti dal $G$, l' $O$ sarà nella periferia circolare che ha per diametro la $DF$; e però l' angolo $FOD$, fatto in essa semiperiferia, sarà retto, per cui $FO$ risulterà perpendicolare al raggio $DO$; e conseguentemente $O$ esprimerà il punto di contatto fra la retta $FO$ e la periferia della base del cono. Quindi la retta $BP$ sarà l' ortografia dimandata; ciò che ecc.

Nella ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, il punto $F$ si può anco determinare, facendo l' angolo $EDF$ semiretto, e segnando nella $DF$ il punto $F$, dove vien segata dalla orizzontale $BF$ condotta pel punto $B$.

Osservazione 6. Se l' operazione fatta nell' osservazione antecedente da una banda della retta $DF$ per trovare il punto $O$, si replicherà dall' altra, avrassi l' analogo punto $o$, dal quale condotta $op$ perpendicolare alla $LM$, e congiunte le $Bp$, $oD$, saranno queste l' ortografia e l' icnografia dell' altro estremo dell' ombra della superficie conica.

Da una proposizione di geometria elementare risulta che i due archi $x$, $y$ non si segheranno, nel solo caso in cui il punto $F$ cadrà dentro della base del cono; ma in questo caso si è già veduto che la superficie conica trovasi tutta illuminata o tutta in ombra: sarà tutta illuminata, se la luce sarà diretta da $B-D$ verso $E-F$, e tutta in ombra, quando avrà la direzione contraria. Quindi, non segandosi i due archetti $x, y$, il disegnatore lascerà in luce od ombreggerà interamente sì l' ortografia che l' icnografia, secondo che i raggi di luce saranno diretti da $B-D$ verso $E-F$, o pel verso contrario.

Nella ipotesi ordinaria esso avrà quest' ultima cognizione più brevemente nel modo seguente. Il quadrato della orizzontale $DF$ risulta, in quest' ipotesi, doppio di quello della $BD$: affinchè si seghino gli archi $x, y$, il punto $F$ deve cadere fuori della base del cono, o sia dev' essere la $CD$ minore della $DF$; dovrà essere adunque il quadrato della stessa $CD$ minore del doppio di quello della $BD$.

Pertanto, presa che avrà la $DH$ eguale alla $BD$, per cui avrà il doppio quadrato della $BD$ eguale a quello della $BH$; se troverà il quadrato della $CD$ maggiore di quello della $BH$, vale a dire se la retta $CD$ risulterà maggiore della $BH$, lascerà tanto l' ortografia, quanto l' icnografia in luce, qualora la luce sia diretta da $B-D$ verso $E-F$; altrimenti, se questa sarà diretta da $E-F$ verso $B-D$, e $CD$ risulti maggiore della $BH$, ombreggerà interamente sì l' una che l' altra di queste projezioni.

Ammessa la luce diretta dal vertice verso la base, se il punto $E$ cadrà nella retta terminata $AC$, e l' $F$ si troverà al disopra della $AC$ stessa, l' ortografia $ABC$ sarà tutta in luce, perchè i contorni dell' ombra propria della superficie conica cadranno in quella parte di essa che non è figurata nella sua ortografia: pel contrario, se il medesimo punto $F$ cadrà sotto la $AC$, e fuori della base, rimarranno in luce due sole parti triangolari della ortografia medesima, e la rimanente, pure triangolare, si dovrà acquerellare.

In ultimo, se si avrà nel disegno una sola porzione della superficie conica, per esempio quella avente per ortografia $mnkt$, si disegnerà la figura $ABCD$, onde poter usare la regola esposta per trovare, ecc.; ma nel disegno si segnerà la sola porzione $rx$ e le altre analoghe che cadranno nell' ortografia della data porzione della superficie conica che si vorrà acquerellare.

Osservazione 7. Alcune volte la porzione della superficie conica che si dovrà acquerellare, avrà tali dimensioni che l' estensione della tavoletta, sulla quale si faranno i disegni, non sarà sufficiente per eseguire su di essa tutte le operazioni necessarie per determinare le projezioni dei contorni dell' ombra propria della superficie medesima: in questi casi, molto frequenti in pratica, si potrà procedere come segue:

Il disegnatore, avendo riguardo alle dimensioni della sua tavoletta ed a tutte le operazioni necessarie per determinare colla regola esposta le projezioni del contorno dell' ombra propria di una superficie conica, concepirà facilmente per approssimazione la maggiore altezza che potrà avere una superficie conica, acciocchè le operazioni

suddette siano per questa superficie eseguibili tutte per intero sulla tavoletta stessa: prenda nell' asse $EF$ (fig. 7) dell' ortografia della superficie conica $ABCD$ in quistione la parte $EF$ non maggiore di quest' altezza, conduca le $BE$, $CF$ perpendicolari all' asse, seghi $CG$ ed $FM$ eguali alla $BE$; e poscia considerando $EF$ come asse di un cono, ed $FG$ il raggio della sua base, determini il punto $H$, come si è determinato l' $O$ nella figura antecedente; fatto ciò, prenda $FI$ eguale alla $CF$, tiri la $IL$ perpendicolare alla $CF$ medesima, e conduca la $NL$ paralella alla $MC$; in ultimo seghi $EP$ eguale alla $FN$, e congiunga la $LP$; e questa sarà l' ortografia da lui richiesta.

Dal punto $V$, dove s' incontrano i prolungamenti delle rette $EF$, $BC$, e dall' $E$ immagino condotte due paralelle ai raggi di luce, e prolungate sino ad incontrare il piano della base: questi due incontri ed il punto $F$ saranno in una medesima retta, perchè trovansi e nel piano della base ed in quello delle due paralelle ai raggi di luce; più le loro distanze dal punto $F$ saranno proporzionali agli assi $FV$, $FE$ dei due coni. Ma a questi assi sono evidentemente proporzionali anco le $CF$ ovvero $IF$, $FH$; adunque le distanze medesime risulteranno anch' esse proporzionali alle rette $IF$, $FH$.

Ora sia congiunto il punto $H$ a quello dei medesimi due punti d' incontro che è più vicino all' $F$, ed il punto $I$ all' altro, e si avranno due triangoli aventi l' angolo in $F$ comune, ed i lati intorno a quest' angolo proporzionali, per quello che si è detto poc' anzi; conseguentemente questi due triangoli saranno simili, per cui i loro angoli in $S$ ed in $H$, opposti a lati omologi, saranno fra loro eguali; quindi l' angolo in $I$ sarà anch' esso retto, per esserlo il suo eguale in $H$, stante la costruzione supposta eseguita per determinare il punto $H$ medesimo.

Essendo retto l' angolo in $I$, cioè l' angolo compreso dalla retta $IF$ e dall' altra tirata dal punto $I$ medesimo a quello dove la paralella ai raggi di luce che passa pel $V$ incontra il piano della base, la seconda di queste medesime due rette risulterà tangente la periferia della base stessa, e tangente propriamente in $I$, ove incontra il raggio $FI$; e per conseguenza il punto $L$, determinato col condurre $IL$ perpendicolare alla $CF$, sarà nell' ortografia dimandata per la proposizione esposta.

Le $FE$, $BC$ e l' ortografia dimandata, essendo tre rette concorrenti al medesimo punto $V$, segheranno le due paralelle $CF$, $BE$ in parti proporzionali; e però dovrà essere la porzione della $BE$, compresa fra $E$ e l' ortografia richiesta, quarta proporzionale dopo le tre rette $CF$, $FL$, $BE$. Ma appunto per essere le $FM$, $FN$ eguali rispettivamente alle $BE$, $EP$, e la $LN$ paralella alla $CM$, la $EP$ è quarta proporzionale dopo le dette $CF$, $FL$, $BE$; adunque il punto $P$ sarà il segamento fatto alla $EB$ dall' ortografia dimandata. Quindi nella retta $LP$, che unisce i due punti $L$, $P$, avrassi la stessa ortografia richiesta; come nella $IF$ evidentemente si avrà la sua icnografia, se $DC$ esprimerà la retta comune ai due piani ortografico ed icnografico.

In fine tutto ciò che ho detto nella tacita supposizione che il vertice della superficie conica cada superiormente al piano icnografico con poche modificazioni e facilmente praticabili, si estende anche al caso che il medesimo sia sotto il piano stesso.

# DE' CONTORNI

## DELLE OMBRE PROPRIE DELLE SUPERFICIE SFERICHE.

A tutti è nota la superficie sferica: essa ha la proprietà caratteristica che tutti i suoi punti sono egualmente distanti da un medesimo punto, il quale dicesi *centro* della sfera.

In virtù di questa proprietà caratteristica della superficie sferica sarà essa data e di posizione e di grandezza, o sia affatto conosciuta, quando sarà dato il suo centro e la distanza da questo punto alla superficie di essa, cioè il suo raggio.

L' ortografia e l' icnografia di una superficie sferica sono evidentemente due circoli aventi i centri, l'uno nell' ortografia e l' altro nell' icnografia del centro di essa, ed i raggi eguali a quello della sfera medesima.

## PROPOSIZIONE III.

*Data l' ortografia di una sfera, trovare quella del contorno dell' ombra propria di essa.*

I piani ortografico ed icnografico passino pel centro della sfera, ed *AEBD* sia l' ortografia di essa.

Nel cerchio *AEBD* si tirino i due diametri *AB, DE*; il primo paralello, e l'altro perpendicolare alla *O*; facciasi l' angolo *FCD* eguale al Δ, e si tiri *FG* perpendicolare al diametro *AB*: fatto questo, descrivasi la semiperiferia *DGE* dell' ellisse concentrica al cerchio dato, e che ha per semiassi *CE, CG*; e sarà questa l' ortografia dimandata.

Dal segamento *F* si tiri l' *FH* tangente la periferia *EFL*, e risulterà l' angolo *FHC* eguale all' *FCD*, cioè eguale all' angolo Δ.

Ora la semiperiferia *ADFB* insieme alle rette *FG*, *FH*, rotando in avanti attorno al suo diametro *AB*, si disponga perpendicolarmente al piano *ADBE*: in questa nuova situazione risultando *FG* perpendicolare al piano ortografico, e la *FH* paralella ai raggi di luce e tangente la superficie sferica, il punto *F* di contatto troverassi nel contorno dell' ombra propria, ed il punto *G*, piede della perpendicolare tirata da questo punto al piano *ADB* o sia ortografico, apparterrà all' ortografia dimandata.

Similmente nella semiperiferia circolare *adfb* descritta sulla corda *ab* paralella al diametro *AB*, fatto l' angolo *fcd* eguale all' *FCD*, condotta l' *fh* tangente, e l' *fg* perpendicolare alla *ah*, cioè fatto per la corda *ab* ciò che si è fatto pel diametro *AB*, risulterà l' angolo *fhc* eguale all' *fcd*, ed il punto *g* apparterrà alla medesima ortografia richiesta.

Essendo gli angoli *fcg*, *FCG* eguali, e gli *fgc*, *FGC* ambedue retti, i triangoli *cfg*, *CFG* saranno simili; e però sarà

$$cg : cf = CG : CF, \text{ o sia } cg : bc = CG : BC;$$

vale a dire un' ordinata qualunque dell' ortografia del contorno dell' ombra alla corrispondente della periferia *AEF*, costantemente, come *CG* : *BC*. Quindi l' ortografia *EgGD*

sarà la periferia dell'ellisse concentrica al cerchio $AEF$, ed avente per due semiassi le rette $CE$, $CG$; ciò che ecc.

Osservazione 1. Denominate le rette $CE$, $CG$, $Cc$, $cg$ rispettivamente $r$, $b$, $x'$, $y'$, la proporzione anzi esposta dà

$$y'^2 : r^2 - x'^2 = b^2 : r^2, \text{ o pure } r^2y'^2 + b^2 x'^2 = b^2r^2$$

per equazione dell' ellisse $EgD$; e posta $y$ la perpendicolare tirata dal punto $g$ all' orizzontale $LM$ asse, ed $x$ la porzione della $CI$ intercetta fra questa perpendicolare ed il punto $C$, $c$ il coseno ed $s$ il seno dell' angolo $BCI$, coll' ordinario metodo delle trasformazioni delle coordinate si trova facilissimamente

$$y' = cx - sy, \text{ ed } x' = sx + cy.$$

Sostituendo questi valori delle $y'$, $x'$ nell' equazione anzi esposta dell' ellisse $EgD$, ed ordinando la risultante rispetto alla $y$, si ottiene

$$y^2 - 2\frac{cs(r^2 - b^2)x}{r^2s^2 + b^2c^2}\,y = \frac{b^2r^2 - (c^2r^2 + b^2s^2)x^2}{r^2s^2 + b^2c^2}$$

per equazione fra le nuove coordinate $x$, $y$ della medesima ortografia in quistione.

Supponendo $y = o$ in quest' ultima equazione, si ha

$$b^2r^2 = (c^2r^2 + b^2s^2)x^2;$$

e però la porzione del raggio $CI$ intercetta fra il centro $C$ ed il punto ove il medesimo raggio vien segato dalla periferia ellittica, cioè $Cv$, sarà eguale ad

$$rb : \sqrt{(c^2r^2 + b^2s^2)}:$$

e determinando l' ascissa $x$, che entra nella medesima equazione, per modo che soddisfi la condizione

$$c^2s^2(r^2 - b^2)^2x^2 = \{(c^2r^2 + b^2s^2)x^2 - b^2r^2\}(c^2r^2 + b^2c^2),$$

cioè che i due valori dell' ordinata corrispondente, dedotti dalla medesima equazione, siano fra loro eguali, ottiensi

$$x = \sqrt{(r^2s^2 + b^2c^2)}, \text{ ed } y = (r^2 - b^2)sc : \sqrt{(r^2s^2 + b^2c^2)};$$

valori i quali esprimeranno le coordinate del punto a cui corrisponde la massima ascissa, stante la proprietà a cui soddisfà il valore della $x$, di rendere cioè eguali i due corrispondenti della ordinata $y$.

Osservazione 2. Siano tirate dai punti $B$, $G$ le rette $Bm$, $Bq$, $Gn$, $Gp$ perpendicolari rispettivamente alle $CI$, $CK$, ed avrassi $Cn = CG$ sen. $ICG = bs$, $Cm = BC$ sen. $ICG = rs$, $Cp = bc$, e $Cq = rc$; e però il massimo valore dell' ascissa, cioè

$\sqrt{(r^2s^2 + b^2c^2)}$ sarà eguale alla radice quadrata di $\overline{Cm}^2 + \overline{Cp}^2$, e

la distanza $Cv$ ad $rb$ diviso per quella di $\overline{Cn}^2 + \overline{Cq}^2$;

o sia l' ascissa massima eguaglierà la retta $mp$, e la distanza fra il centro ed il punto dove la periferia ellittica sega il raggio $CI$, cioè $Cv$, sarà quarta proporzionale dopo le tre rette $nq$, $CG$, $CI$. Cosicchè, prendendo $CN$ eguale alla $nq$, e dal punto $G$ tirando la paralella alla $NI$, questa incontrerà la $CI$ nel punto medesimo ove sarà essa segata dalla periferia ellittica $EgD$.

Avrei potuto costruire anche il valore esposto dalla $y$ corrispondente all' ascissa massima, come ho costruito i due della $x$; ma sarà meglio determinarlo col metodo seguente, o col lemma decimo.

Alla estremità dell' ascissa massima, già determinata, si tiri la verticale, e si estenda sino a segare il prolungamento del diametro $DE$; e da questo segamento tirisi una tangente la periferia $EbI$, e dal punto di contatto la perpendicolare alla $CE$, che nel segamento di questa colla verticale anzidetta saravvi evidentemente il punto della periferia ellittica, al quale corrisponde la massima ascissa.

Così il segamento $v$ della periferia ellittica col raggio $CI$ si potrà anche esso determinare, prolungando $FG$ sino in $M$, conducendo la $MP$ perpendicolare all' asse $LM$ ed eguale all' $FG$, ed al punto $Q$, dove la retta $CP$ sega la periferia $IBL$, tirando la $Qv$ perpendicolare al raggio $CI$, giacchè il segamento di questo colla stessa perpendicolare sarà il punto dimandato.

Di fatto nel piano, lemma terzo, dell' estremo dell' ombra propria della sfera s' immagini la retta che ha l' $FM$ per ortografia, la quale sarà paralella alla $DE$, ed avrà la distanza dal piano ortografico eguale alla $FG$; e suppongasi prolungata sino ad incontrare il piano icnografico: evidentemente il punto d' incontro avrà $M$ per ortografia; e però ammesso il triangolo $MPC$ nel medesimo piano icnografico, il punto $P$ cadrà in questo incontro, e la retta $CP$ nella traccia icnografica del piano del contorno dell' ombra. Quindi il punto $Q$ coinciderà col segamento di questa traccia e di quella della sfera, o sia sarà $v$ il segamento della periferia ellittica esprimente l' ortografia in quistione e del raggio $CI$, come ho asserito.

Corollario 1. Nella ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione che fissano generalmente i disegnatori, l' angolo $BCI$ risulta semiretto, ed il quadrato della $FG$ doppio di quello della $CG$; e però $c^2 = s^2 = \frac{1}{2}$, e $b^2 = \frac{1}{3} r^2$. Quindi sarà

$$Cv = br : \sqrt{(r^2c^2 + b^2s^2)} = r : \sqrt{2};$$

cioè il segamento che fa la periferia ellittica al raggio $CI$, sarà nella perpendicolare condotta dal punto $E$ al medesimo raggio $CI$. Similmente si ottiene l' ascissa massima

$$\sqrt{(r^2s^2 + b^2c^2)} = r\sqrt{\frac{2}{3}} = CG \cdot \sqrt{2},$$

e l' ordinata corrispondente, cioè

$$(r^2 - b^2) : \sqrt{(r^2s^2 + b^2c^2)} = r\sqrt{\frac{2}{3}}:$$

valori i quali insegnano che tanto la massima ascissa, quanto l' ordinata corrispondente eguagliano in questo caso la $CM$; e però saranno amendue determinabili facilissimamente.

Nella ipotesi che i raggi di luce abbiano l' anzidetta direzione, condotta dal punto $B$ una tangente eguale alla corda $BD$, e congiunta l' altra sua estremità al centro $C$; questa retta segherà la periferia $EBL$ nello stesso punto $F$.

Osservazione 3. La parte del cerchio $ADBE$ che si dovrà acquerellare, sarà $EGDQE$, ovvero $EGDAE$, secondo che i raggi di luce saranno diretti come nell' osservazione

prima della prima proposizione, o pel verso affatto contrario: queste parti si ridurranno agli stessi semicerchj $DBE$, $DAE$ quando i raggi di luce saranno paralelli al piano ortografico.

Osservazione 4. Tutto ciò che ho detto per l' ortografia del contorno dell' ombra propria della superficie sferica, vale anche per l' icnografia del medesimo, purchè s' intenda che il cerchio $EBL$ esprima l' icnografia della sfera, il diametro $AB$ sia paralello alla $I$, e che l' angolo $DCF$ eguagli $\Sigma$, cioè quello fatto dai raggi di luce col piano icnografico.

## DE' CONTORNI

### DELLE OMBRE PROPRIE DELL' ELLISSOIDE QUALUNQUE, IPERBOLOIDE A DUE FOGLIE E PARABOLOIDE ELLITTICA.

Due ellissi abbiano un asse comune ed i loro piani perpendicolari, ed un piano sia perpendicolare al loro asse comune: unendo i due punti dove questo piano sega la periferia di una delle due ellissi, ed anco i due ove sega quella dell' altra, hansi due rette terminate e fra loro perpendicolari. S' immagini costituita l' ellisse che ha queste due rette per assi, e fatta una simile operazione per tutti i piani che si possono immaginare perpendicolari allo stesso asse comune alle ellissi suddette, si avranno infinite periferie ellittiche fra loro simili. La superficie nella quale si trovano tutte queste periferie ellittiche, e che dir si potrebbe costituita da esse medesime, chiamasi *ellissoide.*

Così se due iperbole avranno un asse comune ed i loro piani perpendicolari, e si farà per un piano perpendicolare al prolungamento dello stesso asse comune un' operazione affatto simile a quella immaginata poc' anzi per l' ellissoide, si avranno infinite ellissi simili, le quali saranno in una medesima superficie: questa si chiamerà *iperboloide a due foglie.*

Similmente, sostituendo alle iperbole anzidette due parabole apolloniane, e facendo la suddetta operazione, avransi infinite ellissi simili, le quali costituiranno la superficie detta *paraboloide ellittica.*

Sebbene queste tre superficie non s' incontrino sì spesso nelle arti, come la sferica, non ostante io le tratto quasi egualmente che quella per soddisfare il desiderio di alcuni artisti, cioè di avere anche per esse delle proposizioni analoghe a quelle che ho fissato di esporre per la sferica.

Le due ellissi nell' ellissoide, le due iperbole nell' iperboloide, e le due parabole nella paraboloide, le quali hanno l'asse comune ed i loro piani fra loro perpendicolari, e che si sono immaginati per definire le medesime superficie, si chiameranno *sezioni principali*, e saranno esse le linee che io supporrò conosciute, come lo sono generalmente nelle arti, onde individuare ciascuna di esse superficie.

Nelle proposizioni che verranno dichiarate rispetto alle tre superficie qui definite, ammetterò generalmente verticale il suddetto asse comune alle due sezioni principali; più supporrò il piano di una di esse sezioni nello stesso ortografico, e conseguentemente quello dell'altra paralello al piano dei profili, e nominerò particolarmente la prima di esse *prima sezione*, e l'altra *seconda sezione*. Così, per semplicità, indicherò sempre la prima sezione colla linea che denominerò $AVB$, ed il suo asse comune anco alla seconda colla retta $VT$, $V$ indicando il vertice della sezione medesima.

## PROPOSIZIONE IV.

*Trovare l'ortografia del contorno dell' ombra propria di una qualunque delle tre superficie anzi definite, conosciute e collocate come si è detto qui sopra.*

Dai punti $D$, $d$ (fig. 9) della linea $AVB$ si conducano le $DE$, $de$ paralelle alla $O$, e lungo ad esse s' immaginino due piani perpendicolari all' $AVB$; le sezioni che questi piani faranno alla superficie di second' ordine, saranno o ellissi od iperbole, oppure parabole; cioè saranno ellissi per qualunque superficie di second' ordine, *lemma quarto*, se le rette $DE$, $de$ segheranno la linea $AVB$ in due punti; parabole nella paraboloide ed iperboloide se risulteranno esse rette paralelle pel primo all' asse, e pel secondo ad uno degli asintoti della prima sezione, *lemmi quinto e sesto*; iperbole saranno per la sola iperboloide, qualora la retta condotta pel centro della prima sezione paralellamente alle $DE$, $de$ cada nell' angolo degli asintoti in cui cadrà la medesima prima sezione, *lemma settimo*.

Incomincerò a soddisfare la proposizione nel caso che queste sezioni siano ellittiche, o sia che la linea $AVB$ seghi in due punti ciascuna delle rette $DE$, $de$, che è quello che ha generalmente luogo; e poscia la soddisfarò per gli altri due casi, cioè quando le sezioni anzidette riescono paraboliche, e quando sono iperboliche.

### PRIMO CASO.

Si tiri il diametro $FfL$ della prima sezione che sega in parti eguali ciascuna delle corde $DE$, $de$; e pei punti, ove la parte anteriore del contorno dell' ombra taglia le periferie delle due sezioni, suppongansi condotte due rette perpendicolari al piano $AVB$, ed altre due paralelle ai raggi di luce: i piedi $P$, $p$ delle perpendicolari, i quali trovansi nelle $DE$, $de$, saranno evidentemente le ortografie dei medesimi segamenti, e le altre due rette, per essere paralelle ai raggi di luce, saranno quelle tangenti delle sezioni ellittiche che faranno cogli assi $DE$, $de$ angoli eguali al $\Delta$, ovvero saranno queste due rette generatrici della superficie involvente.

Le rette $FP$, $fp$ risultando le stessissime ascisse corrispondenti ai punti di contatto tra ciascuna sezione ellittica e le loro tangenti suddette, le quali fanno cogli assi $DE$, $de$ angoli fra loro eguali, ed essendo queste medesime sezioni ellissi simili, come si dimostra nel *lemma ottavo*, avrassi

$$FE : FP = fe : fp.$$

Quindi l' ortografia del contorno dell' ombra sarà una linea di second' ordine della stessa specie della prima sezione, avrà comune con questa il diametro

che troverassi nella retta $FL$, che divide ciascuna delle corde $DE$, $de$ in due parti eguali, e toccherà in $L$ tangenzialmente la medesima sezione prima, cioè nello stesso punto di contatto della sua tangente paralella all' ortografia $O$.

L' anzidetta sezione ellittica avente per uno degli assi la retta $DE$ dà

$$DC \cdot CE = \overline{DF}^2 = C^2 : F^2, \text{ ovvero } M^2 : \overline{DF}^2 = C^2 : F^2,$$

$C$ ed $F$ esprimendo le ordinate rettangole della medesima sezione e corrispondenti ai punti $C$, $F$, ed $M$ la media proporzionale geometrica fra le rette $CD$, $CE$; e però sarà

$$M : DF = C : F;$$

proporzione dalla quale si desume facilmente la lunghezza dell' altro asse della medesima sezione ellittica.

Ora, conoscendo i due semiassi di questa sezione ellittica, e sapendo d' altronde che $FP$ debb' essere la sua ascissa centrale corrispondente al punto ov' è toccata dalla tangente che fa coll' asse $DE$ l' angolo eguale al $\Delta$, la medesima retta $FP$ si potrà determinare col *lemma nono* o col *decimo*.

Determinata la lunghezza della $FP$, si costruisca il triangolo equilatero $LMN$ (fig. 10), che abbia i lati eguali alla $EF$, si prenda $MS$ eguale alla $FP$, e si congiunga la $LS$: fatto ciò, prendansi le $Lm$, $Ln$ amendue eguali alla $fe$, congiungasi la $msn$, e si porti nella $ef$ dal punto $f$ verso l' $e$, la $fp$ eguale alla $ms$, che il punto $p$, così determinato, apparterrà all' ortografia richiesta.

Imperciocchè, essendo la retta $mn$ paralella alla $MN$, si ha

$$MN : MS = mn : ms, \text{ ovvero } FE : FP = fe : ms,$$

per essere le $MN$, $MS$, $mn$ eguali ordinatamente alle $FE$, $FP$, $fe$; ma per quello che sopra ho dimostrato, hassi anche

$$FE : FP = fe : fp;$$

sarà adunque $fp$ eguale ad $ms$. Quindi il punto $p$ apparterrà veramente all' ortografia in quistione, come ho asserito.

Nel modo stesso che si è trovato il punto $p$, si potranno determinare quanti altri punti si vorranno dell' ortografia $PpL$ - -, e conseguentemente descrivere la medesima.

### SECONDO CASO.

Nella paraboloide, siccome le sezioni fatte dai piani perpendicolari all' $AVB$ (fig. 11), e condotti lungo le rette $DE$, $de$ paralelle alla $VT$ asse, sono tante parabole eguali, come si dimostra nel *lemma sesto*; così saranno eguali anco le distanze $DP$, $dp$ fra i vertici $D$, $d$ e le ortografie dei segamenti di esse coll' estremo dell' ombra, essendo queste distanze le stessissime ascisse corrispondenti ai punti dove esse parabole sono toccate tangenzialmente dalle rette paralelle ai raggi di luce, le quali fanno evidentemente angoli eguali cogli assi $DE$, $de$.

Quindi l' ortografia dimandata sarà in questo caso una parabola eguale perfettamente alla prima sezione principale ed avente l' asse nella medesima retta $VT$.

L' asse della parabola *avb* essendo nella *VT*, il suo vertice sarà l' ortografia del punto di contatto fra la seconda sezione e la sua tangente, che fa coll' asse *VT* l' angolo eguale al $\Delta$; e però, siccome la seconda sezione ha il vertice in *V*, per asse *VT*, e di essa si conosce almeno un altro punto; così la distanza *Vv* od ascissa corrispondente al punto di contatto anzidetto si potrà determinare col *lemma undecimo.*

Trovata la lunghezza della *Vv*, si descriverà facilmente la parabola *avb*, o ricopiando opportunamente la stessa *AVB*, ovvero conducendo le rette *DP*, *dp* paralelle ed eguali alla stessa *Vv*, giacchè i punti *P*, *p*--, determinati in tal guisa, apparterranno all' ortografia dimandata.

Nell' iperboloide essendo le rette *DE*, *de* (fig. 12) paralelle ad una delle *NM*, *NS* asintoti della prima sezione, per esempio alla *NS*, le sezioni fatte ad essa dai piani immaginati secondo queste rette saranno parabole, *lemma quinto*, aventi i parametri proporzionali alle rette *NR*, *Nr*; e però le distanze *DP*, *dp* fra i vertici *D*, *d* di queste parabole e le ortografie dei loro segamenti col contorno dell' ombra dovranno essere proporzionali alle medesime rette *NR*, *Nr*, essendolo ai parametri anzidetti, *osservazione prima del lemma nono.* Ma queste rette diminuiscono evidentemente a misura che i punti *D*, *d* si avvicinano all' asintoto *NS*, e finalmente svaniscono insieme colle distanze che hanno questi punti *D*, *d* dall' asintoto medesimo;

Adunque l' ortografia richiesta in questo caso ha anch' essa la retta *NS* per asintoto, ed è essa una linea di second' ordine per essere projezione di un' altra pure di second' ordine, *lemma terzo;* quindi sarà anch' essa una iperbola.

Per descriverla, si faccia *TV* eguale alla *TD*, e *TX* all' ordinata della seconda sezione e corrispondente alla sua ascissa *VT*, si tiri *XQ* perpendicolare alla *XV*, ed avrassi nella *TQ* il parametro della parabola suddetta, che ha per asse la *DT* ed il vertice in *D*: ciò fatto, *lemma undecimo*, si determini la *DP*, e poscia si trovi la quarta proporzionale dopo le rette *NR*, *DP*, *Nr*, e si seghi della *de* la parte *dp* eguale a questa quarta proporzionale, e si avrà il punto *p* qualunque dell' ortografia dimandata.

Queste quarte proporzionali si potranno determinare con facilità, come si è trovata *fp* alla fine del caso antecedente, sostituendo alle rette *FE*, *FP*, *fe* della figura nona le *RN*, *DP*, *rR* della presente.

## TERZO CASO.

Finalmente abbia luogo l' ultimo caso della proposizione, cioè nell' iperboloide la retta *ND* (fig. 13) paralella alla *O*, e condotta per *N* centro della prima sezione, seghi la sezione medesima o sia attraversi l' angolo *MNS* compreso dagli asintoti di essa sezione: in questo caso le sezioni fatte all' iperboloide secondo le rette *DE*, *de* saranno tante iperbole, *lemma settimo*, aventi i vertici in *D*, *d*, ed i centri in *N*, *n* punti della *Nn*-- diametro secondario della prima sezione e paralello alla sua tangente in *D*; più saranno queste iperbole fra loro simili, come si dimostra nel *lemma medesimo*; e però le distanze fra i vertici *D*, *d* e le ortografie dei loro segamenti coll' estremo dell' ombra risulteranno proporzionali ai semidiametri *ND*, *nd*, *osservazione prima del lemma nono;* cioè sarà

$$ND : DP = nd : dp.$$

Quindi per essere le rette $ND$, $nd$ ordinate della prima sezione rispetto ai diametri conjugati-- $nN$, $EN$, l'ortografia dimandata sarà anch'essa un' iperbola.

Per descriverla, determinata che si avrà una distanza $DP$, si procederà in un modo in tutto simile a quello usato nel primo caso, sostituendo alle rette $FE$, $FP$, $fe$, $fp$ della figura nona rispettivamente le altre quattro $ND$, $DP$, $nd$, $dp$ di questa.

Osservazione. Tutto ciò che ho detto nell' ipotesi che l' asse comune alle sezioni prima e seconda fosse verticale, vale anco pel caso che l' asse medesimo sia disposto comunque nel piano ortografico, purchè in questo piano vi sia sempre anche la prima sezione.

## PROPOSIZIONE V.

*Trovare l' icnografia del contorno dell' ombra propria di una paraboloide, conoscendosi* AVB (*fig.* 14) *ortografia, ed* arbf *traccia icnografica di essa superficie.*

Lungo le rette $de$, $fg$ paralelle alla $I$ siano condotti due piani verticali, e le loro sezioni colla paraboloide saranno due parabole eguali, aventi i loro assi nelle verticali $s-TV$, $l-tv$, *lemma sesto*; e pei segamenti del contorno dell' ombra propria e di queste parabole suppongansi tirate due paralelle ai raggi di luce, e queste risulteranno due tangenti delle medesime parabole, e facenti angoli eguali fra loro cogli assi di esse, perchè sono esse rette generatrici della superficie involvente. Quindi le distanze fra i punti $s$, $l$ ed i due $P$, $p$ icnografie dei medesimi segamenti saranno fra loro eguali, e conseguentemente l' icnografia in quistione sarà una retta.

Pertanto se dal punto $\beta$ di contatto fra la retta paralella alla $O$ e la linea $AVB$ si condurrà $\beta C$ perpendicolare alla $ab$, e dal punto $C$, il quale rappresenta l' icnografia di un punto del contorno dell' ombra propria della paraboloide, si condurrà $\xi\mu$ paralella alla $hm$, che divide per mezzo le corde $fg$, $de$, otterrassi nella stessa $\xi\mu$ l' icnografia dimandata.

Osservazione 1. Nell' ordinaria ipotesi rispetto ai raggi di luce essendo $sC$ eguale alla metà del parametro della prima sezione, sarà anche $sc$ eguale alla metà del parametro della seconda sezione; e perciò, prendendo le rette $sC$, $sc$ eguali rispettivamente alla metà dei parametri della prima e seconda sezione, e congiunti i punti $C$, $c$, avrassi nella retta indefinita -- $\xi c C\mu$ -- l' icnografia dimandata senza alcun' altra operazione.

Osservazione 2. Se dai segamenti $\xi$, $\mu$ dell' icnografia $\xi\mu$ e della periferia ellittica $aefd$, i quali si possono determinare, *lemma ventiquattresimo*, anche senza descrivere questa periferia ellittica, si condurranno due rette perpendicolari alla $AB$, avransi i punti $\alpha$, $\delta$, dove l' orizzontale $AB$ sarà segata dalla $\alpha\beta\delta$ ortografia del contorno dell' ombra propria della paraboloide; e ciò senza bisogno di delineare la medesima ortografia.

## PROPOSIZIONE VI.

*Trovare l' icnografia del contorno dell' ombra propria di una iperboloide, disposta e conosciuta come la paraboloide nella proposizione antecedente.*

Ritenute tutte le convenzioni del *lemma dodicesimo*, siano condotti per le rette $de$, $fg$ due piani verticali, e pei punti, ove le iperbole risultanti sono segate dal contorno

dell' ombra, s' immaginino due rette paralelle ai raggi di luce, e queste saranno al solito due di quelle tangenti di queste iperbole facenti coi loro assi verticali angoli eguali; e perciò le distanze $sP$, $lp$, le quali eguagliano quelle fra i punti di contatto ed i prolungamenti degli assi medesimi, saranno proporzionali alle lunghezze di questi assi, *osservazione prima del lemma nono*. Ma questi assi sono i doppj delle ordinate verticali della sezione fatta all' iperboloide col piano verticale che passa per $hm$, e riferite ai due assi di essa; adunque anche i punti $P$, $p$ saranno in una iperbola.

Per delineare questa iperbola, disegnata la sezione verticale che passa per $hm$, procederassi come nella prima parte della proposizione quarta.

Quando l' iperboloide sarà di rotazione, la sezione fatta verticalmente dal piano passante per la retta $hm$ eguaglierà perfettamente la stessa prima sezione.

Osservazione 1. Dal segamento che fa questa iperbola alla periferia ellittica $aefb$, condotte due perpendicolari alla $AB$, nei loro piedi avransi i segamenti della stessa $AB$ e dell' ortografia del contorno dell' ombra senza punto descrivere la medesima ortografia.

Osservazione 2. L' icnografia dell' ombra propria di una ellissoide si determinerà precisamente come si trova la sua ortografia, sostituendo però al piano verticale $AVB$ (fig. 9) quello dell' icnografia, alla retta $O$ la $I$, ed alla prima sezione quella fatta alla medesima ellissoide dal piano orizzontale condotto pel suo centro: i segamenti della ortografia del contorno dell' ombra e della orizzontale condotta pel centro della prima sezione si possono avere facilmente nel seguente modo, senza descrivere l' icnografia medesima.

Sia $oemd$ (fig. 14) l' icnografia della detta sezione orizzontale o sia della stessa ellissoide.

Si trovino le ascisse centrali della $dh\mu$ prese nella $ab$ e corrispondenti ai punti di contatto fra essa icnografia e le sue tangenti paralelle alla $I$, *lemma decimo*, e nei termini laterali di esse ascisse avransi i segamenti dimandati.

## DE' CONTORNI

### DELLE OMBRE PROPRIE DELLE SUPERFICIE DI ROTAZIONE.

Una retta ed una linea qualunque siano unite fra loro invariabilmente; facendo rotare la retta intorno a due punti di essa, senza che essi cambino la loro posizione che hanno nello spazio, la linea qualunque fissamente unita a questa retta genera una superficie che si chiama di *rotazione*.

La retta che passa costantemente pei due punti individuati dello spazio, chiamasi *asse di rotazione*, o semplicemente *asse* della superficie di rotazione; e l' altra linea, di qualunque specie sia, dicesi *linea generatrice* della superficie stessa.

La superficie di quel corpo, chiamato comunemente dagli architetti *toro ordinario*, è una superficie di rotazione, la quale ha per generatrice una semiperiferia circolare, il cui piano passa per l' asse di rotazione, ed il cui diametro, base di essa, trovasi paralello al medesimo asse.

Dalla definizione qui data della superficie di rotazione ne discende immediatamente che una superficie di rotazione sarà affatto affatto individuata, qualora lo sia il suo asse ed una sua generatrice; che la linea comune ad una di queste superficie ed al piano perpendicolare all' asse sarà sempre la periferia di un cerchio avente il centro nell' asse medesimo; in terzo luogo, che le sezioni fatte ad una di esse con piani passanti per l' asse di rotazione risulteranno altrettante linee fra loro eguali perfettamente, e ciascuna delle quali esprimerà una generatrice piana della superficie medesima. A queste verità, per sè medesime evidenti, appoggerò tutto quello che dirò delle superficie di rotazione.

## PROPOSIZIONE VII.

*Trovare l' ortografia e l' icnografia del contorno dell' ombra propria di un toro ordinario avente l' asse di rotazione verticale, conoscendosi quest' asse medesimo e la semiperiferia generatrice della superficie di esso.*

Sia *bb* l' ortografia, e *C* l' icnografia (fig. 15 e 16) dell' asse di rotazione; e la semiperiferia *faf*, la cui base *ff* è paralella alla *bb*, sia l' ortografia, e la retta *AF* l' icnografia della data generatrice; cioè l' ortografia del toro sia espressa dal quadrilatero *afed* composto del rettangolo *ffdd* e dei semicircoli *faf*, *ded*, che hanno per diametri le verticali *ff*, *dd*, e l' icnografia del medesimo sia indicata dai circoli *APE*, *FOD* concentrici in *C*.

Sebbene nella figura si esprima che *AE* è la retta attorno cui ha rotato il piano ortografico per adattarsi all' icnografico, nulladimeno onde semplificare i ragionamenti, senza complicare maggiormente la figura, supporrò la retta comune ai due piani ortografico ed icnografico la *ace*, o sia che il piano icnografico passi lungo l' orizzontale che unisce i centri dei due semicircoli *faf*, *dcd*.

Si tiri *CV* paralella alla *I*, costruiscasi il triangolo *CGH* rettangolo in *C*, che abbia il lato *CG* eguale alla *AF*, e l' angolo *CHG* eguale al Σ; descrivasi l' arco circolare *CL*, facendo centro in *G*, e si descriva pure il semicerchio *CUH*. Fatto questo, si tiri la retta *CT*, la quale sarà segata in *n* dalla semiperiferia *CUH*, prendasi la *Cr* eguale alla *Cn*, si unisca la *Gr*, e dal punto *s*, dove questa è segata dall' arco *CsL*, tirisi la *st* perpendicolare alla *CG*: prendendo la *OM* eguale alla *Gt*, il punto *M* apparterrà alla icnografia del contorno dell' ombra propria del toro; e conducendo la *Mc* paralella alla *Cc*, e segando *m*1 eguale alla *ts*, avrassi il punto *m* della ortografia del contorno dell' ombra propria del medesimo toro.

Immagino il piano verticale lungo la retta *CT*; la sezione comune ad esso piano ed alla superficie anteriore del toro sarà la semiperiferia circolare che ha il centro in *O* ed il vertice o sia il suo punto di mezzo in *P*.

Il punto comune a questa semiperiferia ed al contorno dell' ombra del toro verrà nominato particolarmente *segamento;* e la sua ortografia ed icnografia saranno i due punti che si avranno singolarmente di vista in ciò che segue.

Essendo il toro una superficie di rotazione, il piano tangente ad esso nel segamento sarà perpendicolare al piano verticale immaginato secondo la *CT*; giacchè è una proprietà di qualunque superficie di rotazione, che un piano tangente ad essa è sempre perpendicolare al piano condotto pel punto di contatto e per l' asse della medesima superficie, il quale è in questo caso la verticale che passa pel punto *C*; e per conseguenza la *projezione ortogonale* su questo piano verticale, di una linea situata nel piano tangente, sarà la stessa retta sezione comune a questi medesimi due piani.

La linea che passa pel sègamento paralellamente ai raggi di luce, per essere tangente al toro, giace nel piano tangente ad esso nel medesimo punto; e però la sua projezione ortogonale sul piano verticale immaginato, per quello che si è detto poc' anzi, sarà la stessa retta comune sezione di questi due piani. Ma il piano tangente al toro nel segamento lo è anche alla semiperiferia verticale che ha il centro in *O* ed il suo vertice in *P*; imperciocchè un piano tangente ad una superficie è anco tangente a tutte le linee diseguate in essa e che passano pel punto di contatto; adunque la projezione ortogonale, qui nominata, sarà essa pure tangente la medesima superficie.

Vale a dire la projezione ortogonale sul piano verticale, immaginato secondo la *CT*, della retta paralella ai raggi di luce, e che passa pel segamento, è tangente nel segamento stesso alla semiperiferia avente il centro in *O* ed il vertice in *P*.

Ora questa semiperiferia verticale rotando attorno al raggio *OP*, insieme alla sua tangente di cui si è parlato qui sopra, si adatti al piano orizzontale *APE*, ed in questa situazione una sua parte sia rappresentata dalla *PN*, e la tangente dalla retta *NT*.

Condotta *NM* dal punto di contatto *N* perpendicolarmente alla *CT*, il punto *M* sarà evidentemente l' *icnografia* del segamento, ed il punto *m* distante dalla *ae* di 1*m* eguale alla *MN*, e situato nella *M*1 paralella alla *Cc*, sarà l' ortografia del medesimo segamento; e tirato il raggio *NO*, l' angolo risultante *MNO* eguaglierà *NTM*, cioè l' angolo acuto che fa colla orizzontale *CT* la projezione ortogonale della retta paralella ai raggi di luce, e di cui ho parlato poc' anzi.

È dichiarato adunque che nel triangolo *MON*, il quale ha *ON* ipotenusa eguale alla retta *AF*, e l' angolo acuto *MNO* eguale a quello compreso dalla orizzontale *CT* e dalla suddetta projezione ortogonale, è dichiarato, dico, che il suo cateto *OM* opposto a questo angolo acuto indica la distanza che ha l' icnografia del segamento dal punto *O*, e l' altro *MN* quanto sia il medesimo segamento disotto del piano orizzontale che passa per la retta *ae*, ovvero la distanza della sua ortografia *m* dalla stessa retta *ae*.

Supposto che il triangolo *CGH*, rotando attorno al suo lato *CH* orizzontale, si disponga verticalmente disotto del medesimo, e poscia sia projettato ortogonalmente sul piano verticale immaginato lungo *CT*, egli è evidente che questa sua projezione sarà un triangolo rettangolo anch' esso in *C*, che avrà un cateto orizzontale, il quale sarà la stessa retta *Cn*, e per ipotenusa la projezione ortogonale della ipotenusa di *CGH*, quando questo si trova collocato verticalmente, come ho supposto.

Ma l' ipotenusa del triangolo *CGH* in questa posizione verticale è paralella ai raggi di luce, e però a quella retta tangente al toro nel segamento e paralella anch' essa ai medesimi raggi; adunque l' angolo in *n* del triangolo rettangolo situato verticalmente sotto la *Cn* sarà eguale all' angolo *MTN*, perchè le projezioni su di un medesimo piano delle rette paralelle sono altrettante rette pure fra loro paralelle.

Il triangolo rettangolo *GCr* e quello posto verticalmente sotto la *Cn* avendo per costruzione i cateti *Cr*, *Cn* eguali, e gli altri due pure eguali, saranno essi triangoli perfettamente eguali; e perciò l' angolo *GrC* del piano eguaglierà quello in *n* dell' altro; e siccome quest' ultimo si è veduto essere eguale all' *MTN*, e *GrC* lo è evidentemente al *Gst*; così l' angolo *MTN* eguaglierà il *Gst*.

Adunque i triangoli $Gst$, $MON$ per avere le ipotenuse eguali ambedue alla $AF$, e gli angoli acuti $Gst$, $MNO$ eguali all' $MTN$, e però eguali fra loro, saranno essi triangoli perfettamente eguali. Quindi il cateto $Gt$ del triangolo $Gst$ indicherà esso pure, come lo indica $OM$, la distanza sulla $OT$ che ha l' icnografia del segamento dal punto $O$; e $ts$, altro cateto del medesimo triangolo $Gst$, esprimerà, pari al suo eguale $MN$, quanto debb' essere sotto della $ae$ l' ortografia del medesimo segamento.

Conseguentemente, siccome si è preso $OM$ eguale alla $Gt$, ed $1m$ eguale alla $ts$, sarà $M$ l' icnografia, ed $m$ l' ortografia del segamento in quistione, cioè del punto del contorno dell' ombra propria del toro, il quale trovasi nel piano verticale che passa per la $CT$. Ma nello stesso modo che si sono determinati i punti $M$, $m$, si possono trovare anche gli altri; adunque ecc.

Osservazione 1. Si conduca la retta $Ml$ perpendicolare alla $CV$, si prolunghi di $lK$ eguale ad $lM$, ovvero si faccia l'angolo $KCV$ eguale al $VCP$, e prendasi $CK$ eguale alla $CM$, e si avrà il punto $K$: fatto ciò, tirisi la $K2$ paralella alla $Cc$, e di essa si seghi la parte $2k$ eguale alla $1m$. Dicendo per la retta $CK$ precisamente ciò che si è detto per la $CM$, si conclude che i punti $K$, $k$ indicano l'uno l'icnografia, e l'altro l'ortografia di un punto del contorno dell' ombra propria del toro.

Similmente, tirata $CQ$ perpendicolare alla $CV$, e condotta $RX$ perpendicolare ad essa $CQ$, e presa $BX$ eguale alla $BR$; ovvero fatto l' angolo $XCQ$ eguale all' $RCQ$, e $CX$ eguale alla $CR$; e poi tirata $Xx$ paralella alla $Cc$, e segata la parte $5x$ eguale alla $3r$ determinata come la $1m$: da quanto si è detto pei punti $M$, $m$, si conclude qui pure che i due punti $X$, $x$ esprimono anch' essi il primo l' icnografia, ed il secondo l' ortografia di un medesimo punto del contorno dell' ombra propria del toro.

Da ciò deriva che tutte le rette perpendicolari alle $CV$, $CQ$, ed estese da ambe le parti sino all' icnografia dell' ombra propria del toro, sono segate in due parti eguali da quella delle medesime due rette $CV$, $CQ$ alla quale sono esse perpendicolari.

Se il punto $R$ cadrà in $M$, sarà $CR$ eguale alla $CM$; e però $CX$ eguale alla $CK$: inoltre l' angolo $XCM$ sarà doppio di $MCB$, come $KCM$ lo è del $VCM$, per cui la somma dei due $KCM$, $MCX$ eguaglierà il doppio di quella degli altri due $VCM$, $MCB$, cioè la somma degli angoli che fanno le rette $KC$, $XC$ colla $CM$ sarà eguale a due retti; e conseguentemente le due rette $KC$, $CX$ saranno in questo caso fra loro per diritto; e siccome sono anche eguali, esse esprimeranno le due metà della medesima $KCX$, la quale passa pel punto $C$ ed ha i suoi termini nell' icnografia. Ma ciò che ho detto della $KCX$ vale per qualunque retta che passi pel punto $C$ ed abbia i termini nell' icnografia $IKMZ$; adunque tutte le rette che passano pel punto $C$ ed hanno i termini loro nell' icnografia, sono segate in $C$ in due parti eguali.

Pertanto, descritta dell' icnografia $IKMZ$ la quarta parte che cade in uno dei quattro angoli retti formati dalle rette $CV$, $CQ$ e dai loro prolungamenti, facilmente determineransi i punti delle parti rimanenti tirando da ciascun punto della parte descritta tre rette, una al punto $C$, e le altre due perpendicolari alle $CV$, $CQ$, e prolungando ciascuna di esse rette quanto la propria lunghezza; giacchè le altre estremità, così determinate, di questi

prolungamenti saranno altrettanti punti della medesima icnografia, per quello che si è qui sopra dichiarato.

Le rette $CV$, $CQ$ segando pel mezzo tutte quelle perpendicolari ad esse e che hanno i termini nell' icnografia del contorno dell' ombra propria del toro, saranno due assi della medesima icnografia; e però la segheranno in quattro parti perfettamente eguali fra loro.

Quindi, descritta una delle quattro parti anzidette, basterà copiarla opportunamente negli altri tre angoli retti, compresi dai medesimi assi, che si otterrà l' intera icnografia dimandata.

Osservazione 2. Ammessa la coincidenza dei punti $M$, $R$, le rette $k2$, $x5$ diventano fra loro eguali, e perciò i punti dell' estremo dell' ombra del toro, aventi le icnografie nei due termini di una medesima retta che passa pel punto $C$, hanno le ortografie l' una sotto e l' altra sopra l' orizzontale $ae$, ed egualmente distanti da questa retta; ed essi punti sono lontani egualmente dal piano orizzontale della stessa $ae$.

Essendo i punti del contorno dell' ombra propria del toro che hanno le loro icnografie nei due termini di una retta che passa pel punto $C$, l' uno sopra e l' altro sotto del piano icnografico, ed equidistanti da esso piano, come ho osservato, la retta che gli unisce passerà pel punto $C - c$, e sarà essa retta divisa in questo medesimo punto in due parti anch' esse eguali; e ciascuna di queste rette segherà il contorno dell' ombra di cui si parla in due parti eguali fra loro perfettamente.

Quindi projettando il contorno dell' ombra ed il punto $C - c$ sopra un medesimo piano qualunque, le rette disegnate in questo piano che passeranno per la projezione del punto $C - c$, ed avranno i loro termini nella projezione del contorno dell' ombra, saranno segate nella projezione del punto medesimo, ciascuna in due parti fra loro eguali; e la projezione medesima del contorno dell' ombra sarà tagliata in due parti eguali da ciascuna di esse rette.

Così le rette aventi i termini nella $4y7m$ ortografia del contorno dell' ombra propria del toro, e che passano pel punto $c$, saranno segate in questo medesimo punto in due parti eguali, come l' ortografia medesima sarà segata in due parti eguali da ciascuna di esse rette;

E però, descritta la metà dell' ortografia colla regola dichiarata, facilmente si descriverà anche l' altra, o conducendo per ogni punto della metà descritta una retta al punto $c$, e prolungandola quanto la sua lunghezza, giacchè l' altra estremità di questo prolungamento sarà nell' ortografia medesima, ovvero copiando opportunamente la metà già descritta con uno di quei metodi sì noti ai disegnatori.

Osservazione 3. Se la retta $CP$ cadesse nella $CV$, il punto $n$ cadrebbe nell' $H$; e però condotta $LJ$ paralella alla $CV$, e presa $9V$ eguale alla $GJ$, e nella $V6$ paralella alla $Cc$ la parte $6v$ eguale alla $JL$, saranno $V$, $v$ l' uno l' icnografia, e l' altro l' ortografia di quel punto dell' estremo dell' ombra che trovasi nel piano verticale passante lungo $CV$.

Essendo $GJ$ minore della $Gt$, ed $LJ$ maggiore della $st$, il punto $V$ sarà uno dei due punti dell' icnografia più vicini al $C$, e $v$ uno di quelli dell' ortografia che sono più lontani dalla retta $ae$.

Se la medesima retta *CP* confonderassi colla *CQ*, il punto *n* cadrà nello stesso *C*; e perciò il punto dell' icnografia, il quale debb' essere nel prolungamento della *Ci*, sarà in *Q*, perchè *iQ* eguaglia *CG*, e la sua ortografia sarà evidentemente in 4, ove l' orizzontale *ae* è incontrata dalla *Q*4 paralella alla *Cc*. Così per essere la *CG* maggiore della *Gt*, sarà *Q* uno dei due punti dell' icnografia che sono più lontani dal *C*, centro di essa icnografia, siccome è d' altronde per sè stesso evidente.

Nella ipotesi comunemente ammessa dai disegnatori rispetto alla direzione della luce, per essere l' angolo *CHG* o sia $\Sigma$ eguale a quello che fa la diagonale di un cubo con una faccia di essa, dovrà essere il quadrato del lato *CH* doppio di quello della *CG*; ma esteso l' arco *CsL* sino a segare la *AC*, essendo in questa ipotesi l' angolo *ACV* semiretto, hassi il quadrato della *Cu* doppio di quello della *CG*; adunque si avrà nella *Cu* immediatamente, cioè senz' altra costruzione, la lunghezza della *CH*, che fa d' uopo conoscere per descrivere la semiperiferia *CNH*.

Osservazione 4. Condotte le rette 78, *yz* tangenti le periferie *faf*, *ded* e paralelle amendue alla *O*, i punti 7, *y* di contatto saranno anche quelli di contatto di esse semiperiferie e dell' ortografia 7*ym* dell' estremo dell' ombra del toro; e questi medesimi punti troveransi in una di quelle rette che passano pel punto *c*.

Se interesserà molto la posizione del punto 7, in vece di determinarlo col condurre la tangente 78, tirerassi pel centro del quadrante *f*7*a* la retta facente disotto della *ac* l' angolo eguale al *BaC* della figura prima, e il suo segamento coll' arco *a*7*f* darà, ed esattissimamente, lo stesso punto 7 di contatto: per trovare l' *y*, si farà altrettanto nel quadrante *dye*, ovvero si congiungerà il punto 7 al *c*, prolungherassi questa retta sino ad incontrare l' arco *dye*, ed il loro segamento sarà il punto *y* medesimo.

Nella ipotesi ordinaria rispetto alla direzione della luce, i due punti 7, *y* sono quelli di mezzo degl' istessi quadranti *f*7*a*, *dye*, perchè l' angolo *BaC* anzidetto è semiretto, parte prima, paragrafo settimo.

Osservazione 5. Siccome tanto la traccia che esprime la semiperiferia descritta sul diametro *CH*, quanto le tracce indicanti le rette tirate da *C* ai punti *M*, *R*, -- hanno naturalmente una larghezza; così i loro segamenti *n*, *h*, -- risulteranno estesi, particolarmente quelli delle rette che fanno colla *CQ* angoli minori di un semiretto, come lo mostra visibilmente il segamento *h*; e però riesce malagevole il determinare esattamente coi segamenti medesimi la vera lunghezza di quelle corde *Cn*, *Ch*, -- che fanno colla retta *CQ* angoli minori di un semiretto: meglio sarà pertanto trovare le lunghezze di queste ultime corde col metodo seguente:

Si prenda *CS* eguale alla *CH*, e si descriva sopra di essa, come diametro, l' arco circolare *SgU*, e nella corda *Sg* si avrà, ed agevolmente, la vera lunghezza della corda *Ch*, che fa d' uopo portare secondo la *CV* da *C* verso *H*, onde ecc.

Imperciocchè i due archi *Ch*, *Sg* appartenenti a circoli eguali, esprimendo amendue il doppio della misura del medesimo angolo *QCR*, saranno fra loro eguali; e però tali saranno pure le corde *Ch*, *Sg* sottese da essi.

### ALTRO METODO PER DESCRIVERE L' ORTOGRAFIA DEL CONTORNO DELL' OMBRA PROPRIA DEL TORO, QUANDO I RAGGI DI LUCE ABBIANO LA DIREZIONE ORDINARIA, SENZA BISOGNO DI VERUNA ICNOGRAFIA.

Sia --*qzep*-- l' ortografia del toro (fig. 17), e *c* un punto di essa analogo a quello della fig. 15.

Si tiri la verticale *pcq* e l' orizzontale *rc*, si costruisca in *a* centro dell' arco *ze* l' angolo *cad* semiretto: ciò fatto, conducansi le *reb*, *ehf* paralelle alle *pq*, *rc*, si congiunga *bhc*, costituiscasi l' angolo *lhf* semiretto, e descrivansi gli archetti circolari *i*, *l* col centro *f* e col raggio eguale alla *fe*, e dai segamenti *l*, *i* tirinsi le *ln*, *im* verticali, che i due punti *m*, *n* saranno dell' ortografia dimandata.

Nella figura diciottesima, la quale esprime visibilmente una parte della sedicesima, si conduca la retta $M3$ paralella alla $CV$, la $T3$ perpendicolare alla $CT$, ed estendasi $Ml$ sino in 4 ad incontrare la $AC$ prolungata, se occorre; e si avrà

$$M3 : MT = CM : Cl,$$

per la simiglianza dei triangoli $M3T$, $MCl$, ed

$$MN : M3 = Cl : C4,$$

essendo le rette $M3$, $C4$ eguali alle diagonali dei quadrati aventi i lati eguali alle $MN$, $Cl$ in virtù della particolare direzione dei raggi di luce; e però sarà

$$M3 \cdot MN : MT \cdot M3 = CM \cdot Cl : Cl \cdot C4, \text{ ovvero}$$

$$NM : MT = CM : C4, \text{ oppure } CM : C4 = MO : MN$$

per essere evidentemente $NM : MT = MO : MN$; vale a dire i punti del contorno dell' ombra, i quali sono naturalmente fra quelli della superficie del toro, debbono avere in questa ipotesi particolare l' esclusiva proprietà che esprime la proporzione geometrica

$$CM : C4 = MO : MN.$$

Ma se i triangoli *lch*, *hci* (fig. 17) col rotare attorno alla retta *ef*, il primo innanzi e l'altro indietro, si dispongono orizzontali, i punti *l* ed *i* passano nella periferia del cerchio orizzontale che ha il centro in *f*, e per raggio *fe*, e però nella superficie del toro; e se nella proporzione

$$cr : fh = br : cf,$$

che danno i triangoli simili *cbr*, *chf*, si sostituiscono in vece delle rette *cr*, *br*, *cf* le loro eguali $fl = fi$, *ar*, *er*, ottiensi la seguente

$$fl : fh = ar : er,$$

la quale esprime che i punti *l* ed *i* hanno la suddetta proprietà esclusiva a quelli del contorno dell' ombra propria del toro; adunque i due punti *m* ed *n*, i quali sono per la costruzione le ortografie degli *l* ed *i*, apparterranno all' ortografia dimandata; come ecc.

## PROPOSIZIONE VIII.

*Trovare l' icnografia e l' ortografia del contorno dell' ombra propria di una superficie di rotazione avente l' asse verticale, conoscendosi la posizione di quest' asse, ed una generatrice della medesima superficie.*

Sia *AB* (fig. 19) l' ortografia, e *G* l' icnografia dell' asse di rotazione della superficie, e *BC* sia la curva piana generatrice della medesima superficie.

Si conduca la retta *aCD* paralella alla *I*, si faccia l'angolo *EDG* eguale al Σ, descrivasi la figura *abnc* eguale perfettamente alla *ABC*, e la periferia circolare *GHD* sulla *GD* come diametro: posto ciò, si tiri una retta *GHI*, si prenda *GL* = *CH*, uniscasi *EL*, si conduca a questa la paralella *nt* che sia tangente la curva *bnc*, si abbassi dal punto di contatto la retta *np* perpendicolare alla *aG*, che preso *GI* eguale alla *ap*, e condotta *IQO* perpendicolare alla *LM* asse, e fatto la *QO* eguale alla *np*, si avrà in *I* l'icnografia, ed in *O* l'ortografia di un punto del contorno dell' ombra in quistione.

Passi il piano verticale per la *GI*, e la sezione della superficie sarà evidentemente una linea eguale perfettamente alla *BC*, e dall' incontro di questa curva e del contorno dell' ombra propria della superficie s' immagini condotta una paralella ai raggi di luce, e poscia projettata ortogonalmente sul medesimo piano verticale, e questa projezione sarà tangente la sezione stessa, e farà colla orizzontale *GI* un angolo eguale all' *ELG*, e però all' *nta*. Quindi *I* ed *O* saranno l' icnografia e l' ortografia del suo punto di contatto sulla superficie di rotazione, cioè di un punto del contorno dell' ombra propria della stessa superficie; come volevasi dimostrare.

Osservazione. Se l' asse della superficie fosse perpendicolare al piano ortografico, si direbbe dell' ortografia e dell' icnografia del contorno dell' ombra propria della superficie di rotazione ciò che si è qui sopra detto dell' icnografia ed ortografia.

## DE' CONTORNI

### DELLE OMBRE PROPRIE DELLE SUPERFICIE SPIRALI.

Una linea piana muovasi in modo che un punto individuato del suo piano percorra un' elice, ed il piano di essa, senza rotare intorno a questo punto, faccia costantemente il medesimo angolo coll' asse dell' elice medesima: la superficie così generata da questa linea mobile si chiamerà *superficie spirale*, la linea stessa mobile *generatrice*, e l' elice *direttrice* di essa superficie.

La superficie di una colonna spirale si può supporre generata dalla periferia di un cerchio che si muove, mantenendosi orizzontale, e percorrendo col suo centro una data linea, purchè il raggio del medesimo cerchio generatore varii, come variano i raggi delle sezioni orizzontali della medesima colonna. Nelle ordinarie colonne spirali la linea che percorre il centro del cerchio generatore, o sia la direttrice, è un' elice avente le tangenti tutte egualmente inclinate al piano icnografico, e situata in una superficie cilindrica ordinaria avente l' asse verticale; e però ammesso costante il cerchio generatore, la superficie di esse sarà spirale.

## PROPOSIZIONE IX.

*Trovare l'ortografia del contorno dell'ombra propria di una colonna spirale ordinaria e non rastremata, conoscendosi il raggio della periferia generatrice, e l'ortografia e l'icnografia dell'elice* direttrice *o sia percorsa dal centro della stessa periferia.*

L'elice percorsa dal centro della periferia generatrice abbia per ortografia la curva *EFG* ( fig. 20 ), e per icnografia la circonferenza circolare *ABC* che ha il centro in *D*.

Dal punto *m*, dove la retta *Dm* perpendicolare all'asse *ML* sega l'ortografia *EFG*, si tiri *mn* tangente a questa, si seghi *ce* eguale alla *AD*, e tirinsi le *ed*, *dN*, *NH*, *DH* paralelle rispettivamente alle *mn*, *O*, *Dm* ed *I*: fatto ciò, uniscasi *H* ad un punto qualunque *A* della periferia *ABC*, si seghi l'arco *AB* eguale ad un quarto di essa, conducasi *BP* perpendicolare alla *HA* ed eguale al raggio della periferia generatrice, le *BF*, *PI* perpendicolari amendue alla *LM*, e finalmente *FI* paralella alla stessa *LM*, ed avrassi in *I* un punto dell'ortografia dimandata.

Si unisca *AD*, descrivasi l'arco circolare *RPS* col centro *B*, e si tiri *TPX* paralella alla *AH* o sia tangente l'arco stesso *RPS* in *P*.

Per essere *t* il punto della periferia *ABC* più vicino alla *ML*, la retta tangente l'elice in *t*—*m* sarà paralella al piano ortografico, e però anche alla *mn* ortografia di essa; quindi gli angoli fatti dalle tangenti l'elice *ABC*—*EFG* col piano icnografico, i quali sono tutti eguali fra loro pel dato, eguaglieranno l'angolo *mnL*, ovvero *deL* determinato sopra. Così conducendo dal punto *D*—*d* delle rette paralelle alle tangenti l'elice medesima, queste formeranno col piano icnografico degli angoli eguali allo stesso *mnL*, e costituiranno conseguentemente i lati della superficie del cono ordinario avente per base il cerchio *ABC*, ed il vertice in *D*—*d*, essendo $ce = AD$, ed *ed* paralella alla *mn*.

Similmente per la stessa generazione della superficie della colonna, supposto che la periferia generatrice non ruoti orizzontalmente attorno al suo centro, ogni punto di essa descriverà un'elice eguale perfettamente a quella descritta dal suo centro; e però la superficie in quistione si può considerare costituita d'infinite elici eguali alla *ABC*—*EFG*.

Ora si seghi la superficie della colonna col piano orizzontale che passa per *IF*, ed ai punti di questa intersecazione, la quale sarà la periferia orizzontale che ha il centro in *B*—*F*, ed il raggio eguale alla *BP*, s'immaginino condotte le tangenti l'elici anzidette: queste tangenti essendo fra loro paralelle per l'eguaglianza perfetta delle elici, costituiranno la superficie cilindrica ordinaria tangente la superficie della colonna nella medesima intersecazione; quindi la periferia orizzontale che ha il centro in *F*—*B* ed il raggio eguale alla *BP*, sarà segata in uno stessissimo punto dai contorni analoghi delle ombre proprie di esse superficie.

Essendo *AD* paralella alla retta tangente in *B* la circonferenza *ABC*, e le *dN*, *HN*, *DH* paralelle ordinatamente alle *O*, *Dd*, *I*, sarà *AH* la traccia icnografica del piano delle rette che passano per *D*—*d*, l'una paralella ai raggi di luce, e l'altra alla tangente in *B*—*F* dell'elice *EFG*—*ABC*; e però il punto *P* di contatto fra la circonferenza *RS*, che ha il centro in *B* ed il raggio *BP*, rappresenterà, per la proposizione prima, l'icnografia del segamento fra la periferia orizzontale avente il centro in *F*—*B* ed il raggio eguale alla *BP*, e l'estremo dell'ombra propria della superficie cilindrica suddetta, e

conseguentemente anche l' icnografia del segamento fra la medesima periferia orizzontale ed il contorno dell' ombra propria della colonna; e pertanto per essere le $BF$, $PI$ perpendicolari, e la $FI$ paralella alla $ML$, sarà $I$, come ho asserito, un punto dell' ortografia dimandata.

Così, prolungando la $BP$ verso $c$ quanto è la lunghezza di essa, nell' altro termine di questo prolungamento si avrà un punto dell' icnografia dell' altro estremo dell' ombra in quistione; e facendo per esso ciò che si è fatto pel $P$, si avrà la corrispondente ortografia.

Osservazione 1. Per avere l' angolo $mnL$ da cui dipende la regola esposta, in vece di condurre la tangente in $m$ alla $EFG$, si potrà segare $cn$ eguale alla parte della periferia $ABC$ intercetta fra il punto $t$ ed il primo termine dell' elice; giacchè, congiunto il punto $n$ così determinato coll' $m$, avrassi la stessa tangente $mn$ suddetta per la notissima proprietà delle elici ordinarie.

Preferirassi con vantaggio quest' ultima regola alla superiormente esposta tutte le volte che la porzione della periferia $ABC$, a cui si dovrà fare eguale la retta $cn$, sarà una parte aliquota, nota, della stessa periferia.

Osservazione 2. Se i raggi di luce fossero orizzontali, la $dN$ sarebbe paralella alla $ML$, e però $AH$ alla $DH$. Adunque segato $AB$ eguale alla quarta parte della periferia $ABC$, tirata $AH$ paralella alla $I$, e poi le $BP$, $BF$, $FI$, $PI$ come superiormente, si avranno immediatamente i punti $P$, $I$. In questo medesimo caso se i raggi di luce, oltre di essere orizzontali, saranno anche perpendicolari al piano ortografico, l' ortografia del contorno dell' ombra si confonderà evidentemente coll' ortografia della stessa colonna; quindi colla regola qui enunciata si potrà, occorrendo, disegnare esattamente anche l' ortografia della colonna medesima.

## PROPOSIZIONE X.

*Data l' ortografia e l' icnografia della linea descritta dal centro della periferia generatrice della superficie di una colonna spirale, e la legge che regola la variazione dei raggi della medesima periferia, mentre che genera la superficie stessa, trovare l' ortografia del contorno dell' ombra propria della colonna medesima.*

Sia $ABC$ l' ortografia (fig. 21), ed $abc$ l' icnografia della linea descritta dal centro della periferia generatrice, e le ordinate orizzontali della linea $gf$ riferita alla retta verticale $DF$ indichino i raggi delle sezioni della colonna situate nei medesimi piani orizzontali.

Si conduca $BgE$ orizzontale, la $Bb$ perpendicolare alla $LM$ asse solito, la $gF$ tangente in $g$ alla linea $gf$, e le $b1$, $bl$, la prima tangente, e la seconda normale in $b$ alla linea $abc$; seghisi $bl$ eguale ad $EF$, e costruiscasi l' angolo $1bm$ eguale a quello che fa col piano icnografico la tangente in $B-b$ alla curva $ABC-abc$, e poi tirisi $lm$ paralella alla $b1$, e la $m1$ alla $bl$: fatto ciò, tirisi $143$ perpendicolare alla $LM$, facciasi $43$ eguale alla $m1$,

conducansi le $1k$, $32$ paralelle rispettivamente alle $I$, $O$, e la $2k$ alla $bB$; finalmente descrivasi l' archetto $\beta$ col centro $b$ ed il raggio eguale alla $gE$, e l' $\alpha$ col centro $n$ punto di mezzo della $bk$ e col raggio eguale alla $bn$, si conduca pel punto $O$ comune a questi due archetti la $OP$ perpendicolare alla $ML$, e si avrà nel segamento $P$ un punto dell' ortografia richiesta.

L' estremo dell' ombra propria del cono, che ha per base il cerchio $b\beta$ ed il vertice in $1-3$, è segato dalla periferia della sua base in $O$ per la proposizione seconda; ed esso cono è eguale perfettamente a quello avente per base la sezione della colonna che ha il centro in $B-b$, e la cui superficie tocca tangenzialmente in questa sezione la colonna stessa, anzi questo è quello alzato verticalmente; adunque il punto $P$, ecc. ecc.

Osservazione. Quantunque la superficie di cui si parla in quest' ultima proposizione ed anche nella seguente non appartenga alla famiglia delle superficie spirali sopra definite, non ostante ho creduto bene di considerarle in questo luogo per la grande analogia che ha con quella considerata nella proposizione precedente, la quale è evidentemente un caso particolare di questa medesima.

## PROPOSIZIONE XI.

*Trovare l' ortografia e l' icnografia del contorno dell' ombra propria della superficie di una colonna spirale comunque posta nello spazio, essendo data l' ortografia e l' icnografia di una retta a cui si mantiene perpendicolare costantemente il cerchio generatore, le projezioni ortogonali della direttrice fatte sopra due piani, l' uno paralello e l' altro perpendicolare, in un dato punto a questa medesima retta, più essendo nota la linea le cui ordinate successive eguagliano i raggi delle successive sezioni circolari della colonna stessa.*

Sia $aP$ l' ortografia (fig. 22), e $BA$ l' icnografia della retta data, a cui sono perpendicolari i piani dei circoli generatori, ed $A-a$ il suo punto per cui passa il piano ad essa perpendicolare, e nel quale è disegnata una delle ortogonali projezioni conosciute della direttrice, o la linea che percorre il centro del cerchio generatore.

Si faccia $AC$ perpendicolare alla $AB$, $Cc$ alla $ML$, $ac$ paralella alla medesima $ML$; indi tirinsi le $MP$, $MBE$ perpendicolari rispettivamente alle $Pa$, $AB$, e saranno queste le tracce di quel piano che passa pel punto $A-a$, ed è perpendicolare alla retta $AB-aP$.

Così facciasi $FG$ eguale alla $AB$, $GH$ perpendicolare alla $FG$ ed eguale alla $Cc$, ed uniscasi $FH$, e sarà $HFG$ l' angolo diedro compreso dal piano icnografico e da quello avente le tracce $MP$, $MB$. Si tiri $AD$ paralella alla $I$, ed $ad$ alle $O$, e le $DE$, $Dd$ rispettivamente perpendicolari alle $ME$, $ML$; e prendasi $FI$ eguale alla $DE$, e poi conducasi $IK$ perpendicolare alla stessa $FI$ ed eguale alla $dn$, indi $KP$ perpendicolare alla $FH$.

Supposto $N$ il punto dove $ME$ è segata dalla sezione comune dei due piani in cui vi sono le projezioni ortogonali conosciute della direttrice, ed $n'me$ l' angolo compreso da questa comune sezione e dalla stessa $EM$;

facendo $bm$, $em$ eguali rispettivamente alle $BN$, $EN$, e le $A'b$, $D'e$ perpendicolari alla $em$ ed eguali alle $FH$, $FP$, otterransi i punti $A'$, $D'$, i quali rappresenteranno la posizione che avranno in questo medesimo piano il punto $A-a$ ed il piede della perpendicolare tirata dal $D-d$ al piano $MPE$; e tirate $A'a'$, $D'n'$ perpendicolari alla $mn'$, e fatta $n'd'$ eguale alla $PK$, avransi nei punti $a'$, $d'$ le projezioni ortogonali dei punti stessi $A-a$, $D-d$ fatte nel piano dato paralello alla $BA-aP$.

Quindi le rette $A'D'$, $a'd'$ rappresenteranno le projezioni ortogonali della $AD-ad$ paralella ai raggi di luce, fatte sui medesimi due piani in cui vi sono disegnate per ipotesi le projezioni della direttrice della superficie della colonna.

Ora che si conoscono nei piani anzidetti le projezioni $A'D'$, $a'd'$ di una paralella ai raggi di luce, le projezioni della direttrice della colonna, non che la linea, le cui ordinate successive eguagliano i raggi delle successive sezioni circolari o paralelle al piano $PME$, si troveranno le projezioni ortogonali $S'T'$, $s't'$ del contorno dell' ombra propria di cui si parla, fatte su questi medesimi due piani, e precisamente come si trovarono le ortografie ed icnografie degli estremi analoghi nelle proposizioni precedenti. Fatto ciò, si tirerà $s'S'$ perpendicolare alla $mn'$, $S'x$ alla $mx$; faransi $NX$, $Fs$ eguali rispettivamente alle $mx$, $xS'$; condurrassi $sv$ perpendicolare alla $FH$ ed eguale alla $s'u'$, la $vz$ perpendicolare alla $ML$, indi $SX$ eguale alla $Fz$, ed $Ss$ perpendicolare alla $ML$, e si segherà $su$ eguale alla $vz$, che i punti $S$, $s$ apparterranno, il primo all' icnografia $ST$, ed il secondo all' ortografia $st$ del contorno dell' ombra propria della colonna spirale comunque posta nello spazio.

S' immagini il quadrilatero $IKPF$ posto verticalmente sulla retta $DE$ in modo che il punto $I$ cada in $D$, e l' $F$ nell' $E$; in questa situazione il punto $K$ cadrà nel $D-d$, ed il $P$ nel piede della perpendicolare tirata dallo stesso punto $D-d$ al piano $PME$; e però $KP$ sarà eguale alla perpendicolare tirata dal punto $D-d$ al piano $PME$, e la $PF$ alla distanza che ha il piede di questa perpendicolare dal punto $E$. Similmente coll' immaginarsi le figure $zvsF$, $GHF$ collocate verticalmente nelle rette $SX$, $AB$ ed in maniera che i punti $z$, $G$ cadano negli $S$, $A$, si comprenderà che $H$, $r$ confonderansi cogli $A-a$, $S-s$, e conseguentemente sarà $vs$ eguale alla perpendicolare tirata da $S-s$ al piano $PME$, la $sF$ alla distanza fra questo piede al punto $X$, come $FH$ eguaglierà la perpendicolare condotta dal punto $A-a$ alla stessa $NE$. Quindi essendo $mb$, $mx$, $me$, $bA'$, $xS'$, $eD'$ eguali ordinatamente alle $NB$, $NX$, $NE$, $FH$, $Fs$, $FP$, e le ultime tre perpendicolari alla retta $me$, i punti $A'$, $D'$ ed $S'$ saranno disposti nel piano $emn'$, come sono nel $PME$ il punto $A$ ed i piedi delle rette tirate dagli $S-s$, $D-d$ perpendicolarmente al piano stesso $PME$: così, per essere $A'a'$, $S's'$, $D'd'$ perpendicolari alla $mn'$, e le $u's'$, $n'd'$ eguali rispettivamente alle $sv$, $PK$, i punti $a'$, $s'$, $d'$ saranno disposti nel piano $mn'd'$, come le projezioni ortogonali degli $A-a$, $S-s$, $D-d$ fatte nel piano paralello alla $AB-aP$ e che passa per la retta, la quale incontra $ME$ in $N$, e sega il piano $PME$ lungo la retta facente colla stessa $MN$ un angolo eguale all' $n'me$, trovansi effettivamente in questo medesimo piano.

5

Pertanto le rette $A'D'$, $a'd'$ rappresentano le projezioni ortogonali della $AD-ad$ fatte sui piani in cui vi sono le projezioni conosciute della direttrice, e reciprocamente le linee $ST'$, $st$ costituite dai punti determinati come gli $S$, $s$ esprimeranno l'icnografia e l'ortografia della linea avente le $S'T'$, $s't'$ per projezioni ortogonali fatte sui detti piani, e conseguentemente le medesime linee $ST$, $st$ saranno l'ortografia e l'icnografia dimandate.

Osservazione. Molte volte in vece di conoscere la posizione del punto $N$ e l'angolo $n'mx$, come ho supposto tacitamente nella costruzione esposta, si conosceranno due punti del piano $PME$, pe' quali passerà quello paralello alla retta $AB-aP$: in questi casi si farà per ciascuno di questi punti ciò che si è fatto pel punto $A-a$, ed avransi nel piano $n'me$ due punti analoghi all' $A'$, i quali, congiunti con una retta, daranno la stessa retta $mn'$ sezione dei due piani nei quali trovansi le projezioni ortogonali conosciute della direttrice della superficie della colonna: generalmente uno di questi punti è lo stesso punto $A-a$.

Così, se la direttrice della superficie della colonna spirale fosse data per via della sua ortografia ed icnografia, converrebbe primieramente trovare le sue projezioni ortogonali sui piani l'uno perpendicolare e l'altro paralello alla $BA-aP$, facendo per ciascun punto di essa ciò che si è praticato pel punto $D-d$, onde avere i due $D'$, $d'$; giacchè nella serie dei punti analoghi al $D'$ avrebbesi la projezione ortogonale di essa direttrice nel piano perpendicolare alla retta $AB-aP$, ed in quella dei simili al $d'$ l'altra projezione ortogonale della medesima direttrice.

## PROPOSIZIONE XII.

*Trovare l'ortografia e l'icnografia del contorno dell'ombra propria della superficie spirale generata dalla periferia di un cerchio, il cui centro percorre un'elice ordinaria avente l'asse verticale, ed il piano del quale passa costantemente per quest'asse medesimo.*

La periferia generatrice della superficie eguagli la $GaO$ (fig. 23) che ha il centro in $F$, e l'elice percorsa dal centro di essa, nel generare la superficie medesima o sia la direttrice, abbia per icnografia la circonferenza $CBV$ avente il centro in $A$, per ortografia la curva $cbv$, e per asse la verticale $A-Aa$; ed $ML$ sia la solita linea comune ai piani ortografico ed icnografico.

Si faccia $hH$ perpendicolare alla $\mu FQ$, la $\mu F$ eguale alla $AB$, e la $EH$ quarta proporzionale geometrica dopo il passo dell'elice $CBV-cbv$, la circonferenza del raggio $\mu E$, e la retta $EN$; si tiri $NP$ tangente in $N$ all'arco $Ga$, si costruisca l'angolo $NQE$ eguale al $\Sigma$, uniscasi la $HPR$, e si descrivano gli archetti $R$, $S$ col centro $E$ ed il raggio $EQ$: fatto ciò, si costruisca l'angolo $IAN$ eguale all' $REQ$, la retta $BX$ eguale alla $FE$, le $Bb$, $Xx$ paralelle alla $Aa$, la $mb$ orizzontale, e la $mx$ eguale alla $EN$, e sarà $X-x$ un punto del contorno dell'ombra propria di cui si parla, cioè $X$ un punto della sua icnografia, ed $x$ dell'ortografia, linee entrambe richieste.

La superficie in quistione si consideri composta d'infinite elici ordinarie aventi l'asse comune $A-Aa$, e queste elici avranno evidentemente i passi eguali; e s'immaginino formati i due triangoli rettangoli, i cui cateti siano pel primo le rette $EN$, $EH$, e per l'altro la circonferenza del raggio $\mu E$ ed il passo comune delle elici anzidette, e saranno essi

triangoli equiangoli, per la proporzione geometrica superiormente costituita. Ma l'angolo del secondo di questi triangoli opposto a quel lato che eguaglia il passo delle elici è eguale all'inclinazione che hanno al piano icnografico le tangenti di quell'elice la cui distanza dall'asse $A-Aa$ è $\mu E$; adunque a questa medesima inclinazione sarà pure eguale l'angolo del primo dei medesimi triangoli opposto al lato $EN$, e che nominerassi $EHN$.

Ora le linee $GN$, $EN$, $NP$, $NQ$ col rotare attorno alla $\mu Q$ passino nel piano innalzato verticalmente sopra questa medesima retta, e sia unita la nuova posizione del punto $N$ ai due $H$, $R$, ed avransi due rette facenti colle $EH$, $ER$, loro icnografie, angoli rispettivamente eguali agli $EHN$, $NQE=\Sigma$; indi si supponga la figura così costituita dalle linee $\mu Q$, $GN\alpha$, $NE$, $ER$, trasportata in modo che le $FE$, $EN$ coincidano colle loro eguali $BX-bm$, $X-mx$; e le rette congiungenti il punto $N$, ora $X-x$, alle nuove posizioni degli $H$, $R$ risulteranno tangenti in $X-x$; la prima alla circonferenza generatrice che ha il centro in $B-b$, e colla quale si confonde attualmente la $GNO$, e l'altra tangente l'elice a cui appartiene lo stesso punto $X-x$; e però il piano di esse rette sarà esso pure tangente la superficie medesima in $X-x$, e conseguentemente la $HR$ nella sua nuova posizione esprimerà la comune sezione del piano orizzontale condotto per la $bm$, e del piano tangente la superficie in quistione nello stesso punto $X-x$.

Ma la retta che unisce il punto $X-x$ alla nuova posizione della $R$ essendo nel piano tangente anzidetto, è essa medesima tangente in $X-x$ la superficie; e per essere l'angolo che essa fa colla novella posizione della $ER$ eguale alla $NQE=\Sigma$, e l'$IAX$ eguale all'$REQ$, risulta essa retta anche paralella ai raggi di luce; adunque il punto $X-x$, sopra trovato, sarà un punto di contatto fra la superficie spirale ed una retta paralella ai raggi di luce, e quindi un punto del contorno dell'ombra propria della stessa superficie; ciò che ecc.

Corollario 1. Se il punto $N$ cadrà in $\alpha$, la retta $ER$ diverrà perpendicolare alla $\mu Q$; e se il medesimo punto $N$ coinciderà con quello di contatto fra l'arco $GN\alpha$ e la sua tangente che fa colla $\mu Q$ l'angolo eguale al $\Sigma$, la $ER$ si confonderà colla $\mu Q$, cioè l'angolo $REQ$ sarà retto nel primo caso, e zero nel secondo.

Corollario 2. Se i raggi di luce fossero paralelli all'orizzonte, la $NQ$ lo sarebbe alla $\mu Q$, e però anche $ER$ paralella alla $HR$; quindi l'angolo $REQ$ eguaglierebbe in tal caso lo stesso $EPH$: e se oltre di essere i raggi orizzontali, la $IA$ sarà perpendicolare alla $ML$, l'ortografia del contorno dell'ombra si confonderà colla stessa ortografia della superficie; e però, occorrendo, si potrà disegnare anche la stessa ortografia della superficie spirale colla medesima regola esposta per trovare l'ortografia del contorno della sua ombra propria in questo caso particolare.

Osservazione 1. Onde avere le altre rette analoghe alla $HE$, in vece di fare per ciascuna di esse ciò che si è fatto per ottenere $HE$, cioè d'istituire tante proporzioni geometriche quante sono le medesime rette, quando sarà determinata una di esse, per esempio $EH$, si potrà procedere nel modo seguente:

Uniscasi $\mu H$, e si tiri $nf$ paralella alla $\mu Q$, e la $\xi ft$ perpendicolare; indi seghisi $\xi t$ eguale alla $FO$, si congiunga $\mu tT$, ed $fT$ sarà per la $FO$ ciò che $HE$ è per $Lm$ od $EN$, cioè la quarta proporzionale geometrica dopo il passo delle elici, la circonferenza del raggio $\mu F$ e la $FO$ stessa.

Si nomini $\pi$ il rapporto della circonferenza al diametro, e $p$ il comun passo delle elici, e si avranno le tre proporzioni

$$p:2\pi\cdot\mu E=En:HE,$$
$$\mu E:HE=\mu\xi:En,$$
$$\mu\xi:\mu F=FO:FT;$$

la prima per la proprietà della retta $HE$, e le altre due per la costruzione.

Moltiplicando i termini corrispondenti di queste proporzioni, se ne ottiene una quarta, che si riduce alla seguente

$$p : 2\pi \cdot \mu F = FO : FT,$$

la quale esprime essere la retta $FT$, anzi determinata, quarta proporzionale geometrica dopo il comun passo delle elici, la circonferenza del raggio $\mu F$, e la $FO$; ciò che ecc.

Osservazione 2. Fatta $ES$ anch' essa eguale alla $EQ$, l' angolo $IAV$ al risultante $QES$, e segata $UV$ eguale alla $FE$ od alla $BX$; indi condotte le $Vv$, $Uu$ paralelle alla $Aa$, e l' orizzontale $vg$, e tagliata $gu$ eguale alla $mx$ o sia alla $EN$, in $U-u$ si avrà un punto del contorno dell' ombra in quistione.

Similmente, segata $Eh = HE$, unita $hPr$, fatte $Es$, $Er$ ambe eguali alla $EQ$; indi costruito l' angolo $I'AZ$ eguale all' $rEQ$, ed $I'AJ$ alla $sEQ$, e segate $CZ$ e $KJ$ eguali alla $FE$, e condotte le $Cc$, $Zz$, $Kk$, $Jj$ paralelle alla $Aa$, e le orizzontali $cp$, $ky$; e segate finalmente $pz$, $yj$ eguali alla $En$, saranno $Z$, $J$ due punti dell' icnografia, e $z$, $j$ i corrispondenti dell' ortografia in quistione: tutto si dimostra come si è fatto pel punto $X-x$.

Essendo gli angoli $IAX$, $IAV$ eguali ai due $I'AZ$, $I'AJ$ ciascuno a ciascuno, e le rette $AX$, $AU$ eguali alle $AZ$, $AJ$, la $D\Delta$ perpendicolare alla $II'$ sarà un asse dell' icnografia qui descritta;

Quindi delineata la parte di essa che cade da una banda della $D\Delta$, agevolmente descriverassi anche l' altra; senza usare la regola dichiarata.

Osservazione 3. La regola esposta per determinare l' ortografia e l' icnografia di un punto del contorno esteriore dell' ombra propria della superficie spirale si estende anche alla determinazione di un punto dell' altro estremo dell' ombra della medesima superficie. Anzi per essere ordinaria l' elice direttrice, l' ortografia intera del contorno dell' ombra propria della superficie stessa risulterà composta evidentemente di tante parti eguali perfettamente fra loro, quanti saranno i passi dell' elice medesima; e l' icnografia del medesimo contorno si ridurrà alla sola icnografia corrispondente ad un passo della direttrice stessa.

Osservazione 4. Sostituendo alla circonferenza $GNO$ una linea qualunque, ad $F$ suo centro un punto individuato di questa nuova linea colla regola dichiarata sopra, si avrà l' ortografia e l' icnografia del contorno dell' ombra propria della superficie spirale generata dalla linea medesima, supposto che il detto suo punto individuato percorri l' elice $CBV - cbv$: in virtù di questa generalità la proposizione nona è riducibile ad un caso particolare della presente.

Se la nuova linea fosse quella costituita dalle rette linee $xP$, $qP$, le rette analoghe alle $HR$, $hr$ passerebbero tutte pel medesimo punto $P$ della $\mu Q$; e se queste due rette linee $xP$, $qP$ terminate saranno egualmente inclinate all' orizzonte, la superficie generata da esse sarà quella del *filetto* di una vite triangolare ordinaria, come la superficie spirale di cui si parla nella proposta proposizione è evidentemente quella dell' analogo filetto di una vite circolare.

# DE' CONTORNI

## DELLE OMBRE PROPRIE DELLE SUPERFICIE DEI CANALI.

La superficie generata da una linea che si muove conservando il suo piano perpendicolare alla linea descritta da un punto individuato di esso piano, e senza rotare intorno a questo medesimo punto, si chiama *superficie dei canali*. La parte superiore delle superficie delle volte dei canali sotterranei, delle scale a chiocciola e di varj membri degli archivolti sono superficie di questa famiglia.

## PROPOSIZIONE XIII.

*Trovare l' ortografia del contorno dell' ombra propria della superficie generata dalla periferia di un cerchio che si muove, mantenendosi perpendicolare alla linea descritta dal suo centro situata nel piano ortografico, conoscendosi la periferia generatrice e la linea descritta dal suo centro o sia la direttrice della superficie medesima.*

Sia $ABC$ (fig. 24) la linea che descrive il centro della periferia generatrice, ed $EDGF$ l' ortografia della superficie, e la periferia $hamc$ (fig. 25) rappresenti l' ortografia di una sfera che ha il raggio eguale a quello della periferia generatrice della superficie in quistione, ed il centro in $b$;

Si descriva $cpa$ ortografia del contorno dell' ombra propria della sfera, conducansi le rette $BL$, $B'L'$,-- normali alla curva $ABC$, e paralellamente ad esse i raggi vettori centrali $bp$, $bp'$,-- dell' ellisse $apc$, cioè $bp$ paralello alla $BL$, $bp'$ alla $B'P'$, ecc.; e delle medesime normali seghinsi le parti $BP$, $BP'$,-- eguali rispettivamente ai raggi vettori paralelli ad esse, e si avranno i punti $P$, $P'$,-- appartenenti all' ortografia del contorno dell' ombra propria della superficie di cui si parla.

Suppongo la superficie in quistione segata da un piano perpendicolare a quello della ortografia, e condotto lungo la $HL$ normale della curva $ABC$ nel punto $B$; la sezione sarà una periferia di cerchio del diametro $HL$, la quale intersecherà in due punti il contorno dell' ombra propria della superficie. Da uno di questi segamenti, dall' anteriore per esempio, sia condotta una paralella ai raggi di luce, e risulterà essa tangente la superficie; e però la sua projezione retta sul piano della sezione toccherà tangenzialmente la sezione stessa nel segamento medesimo.

Ora questa sezione e la sua tangente, col rotare attorno alla $HL$ insieme al piano segante in cui trovansi, si adattino a quello dell' ortografia; e siano in questa nuova posizione rappresentate, la periferia dalla $HML$, e la sua tangente dalla $MT$; e dal punto $M$ di contatto conducasi la $MP$ perpendicolare alla $HL$, e sarà $P$ l' ortografia del segamento suddetto.

Similmente, segata la sfera rappresentata dal cerchio $hamc$ con un piano perpendicolare all' ortografico e che passi pel diametro $hl$ paralello alla normale $HL$, la sezione

sarà un cerchio massimo, la cui periferia incontrerà in due punti l'estremo dell'ombra propria della sfera; e dall'anteriore di questi due segamenti conducendo una paralella ai raggi di luce, risulterà tangente la sfera; e per conseguenza la sua projezione ortogonale sul piano del detto cerchio massimo sarà tangente a questo nello stesso segamento.

Questo cerchio massimo insieme alla sua tangente, rotando attorno al diametro $hl$, si adatti al piano $hamc$: in tale situazione il cerchio sarà rappresentato dalla stessa ortografia della sfera; e la sua tangente lo sia dalla retta $mt$ tangente in $m$ all'ortografia medesima.

Condotta la $mp$ perpendicolare alla $ht$, sarà $p$ l'ortografia del segamento anteriore, e però $p$ un punto dell'ellisse $apc$ esprimente l'ortografia dell'estremo dell'ombra propria della sfera, e che si delineerà colla regola esposta nella proposizione terza.

Siano tirati i raggi $BM$, $bm$,

Le due tangenti $MT$, $mt$ nelle loro posizioni primitive, cioè nei piani immaginati secondo le rette $HL$, $hl$, essendo le projezioni ortogonali di due rette paralelle ai raggi di luce, gli angoli $MTB$, $mtb$ saranno fra loro eguali; e perciò i due triangoli rettangoli $BMP$, $bmp$, i quali hanno le ipotenuse eguali, e gli angoli $BMP$, $bmp$ rispettivamente eguali ai medesimi $MTB$, $mtb$, saranno essi triangoli perfettamente eguali; e quindi $BP$ eguaglierà $bp$, ed $MP$ la $mp$.

Ma nello stesso modo che si è dimostrato $BP = bp$, si dimostrerebbe anche $B'P' = bp'$, --; adunque, essendosi segate $BP$, $B'P'$, -- eguali ordinatamente alle $bp$, $bp'$, --, i punti $P$, $P'$, -- apparterranno all'ortografia dimandata, come ho asserito.

Corollario 1. Se la linea $ABC$ (fig. 26) sarà circolare, descritta l'ellisse suddetta $apc$ concentrica ad essa linea, i raggi vettori paralelli alle sue normali $BL$, $B'L'$, -- saranno le stesse loro parti $bp$, $bp'$, --, cioè sarà $bp = BP$, $bp' = B'P'$, --; e però anche

$$bp + Pb = BP + Pb,\ bp' + P'b = B'P' + P'b, \text{-- o sia } Pp = Bb,\ P'p = B'b = Bb, \text{--};$$

vale a dire tutte le rette $pP$, $pP'$, -- saranno eguali alla $Bb$ raggio della periferia $ABb$.

Quindi, prendendo le $pP$, $p'P'$, -- eguali alla $Bb$, avransi in un tratto i punti $P$, $P'$, -- dell'ortografia dimandata.

Nell'ipotesi ordinaria rispetto alla direzione dei raggi di luce, l'ellisse che bisognerà descrivere, avrà l'asse maggiore, che farà un angolo semiretto coll'orizzonte, e l'asse minore, il cui quadrato sarà un terzo del quadrato dell'altro: tutto questo si è veduto nella proposizione sovra citata.

Corollario 2. Essendo $BP = bp$, $BL = bl$, sarà anche $PL = pl$; e però prendendo (fig. 24 e 25) $LP = lp$, $L'P' = l'p'$, --, si determineranno i punti $P$, $P'$, -- come sopra.

Osservazione. Facendo $RB$, $R'B'$, -- eguali alle stesse $BP$, $B'P'$, --, si ottengono i punti $R$, $R'$, -- dell'ortografia dell'estremo invisibile dell'ombra in quistione.

Corollario 3. La minima delle rette $BP$, $B'P'$, -- sarà la paralella all'asse minore dell'ellisse $apc$, o quella fra esse la quale farà con quest'asse il minimo angolo, e la massima sarà quella che avrà delle simili proprietà coll'asse maggiore della medesima ellisse.

Nel caso della linea $ABC$ circolare (fig. 26) le minime delle rette anzidette, e però i punti dell'ortografia $1P2$ più prossimi alla stessa $ABC$ trovansi nella $B'b3$, di cui è parte l'asse minore dell'ellisse $apc$; e le massime di esse rette, e conseguentemente i punti della stessa $1P2$ più lontani dalla medesima direttrice $ABC$ saranno 1, 2, dove l'asse maggiore $ac$ esteso sufficientemente incontra la periferia circolare $1l2$. In questo medesimo caso negl'istessi punti 1, 2 incomincia l'ortografia della parte invisibile dell'estremo dell'ombra che ha per ortografia -- $P'P$ --; e negli $R$, $Q$ situati nella stessa

retta $RQ$ degli 1, 2 principia a vedersi il contorno dell' ombra esteriore, la cui ortografia è rappresentata dalla linea - - $R35R$ - -, che si determina anch' essa col fare $43 = bp$, $65 = bp'$, - -, ovvero $37 = lp$, $58 = l'p'$, - -, o più semplicemente facendo le rette $p3$, $p'5$, - - tutte eguali alla stessa $b4$, siccome è egli evidente.

## PROPOSIZIONE XIV.

*Descrivere l'ortografia del contorno dell' ombra propria della superficie del canale che ha la direttrice nel piano ortografico, come nella proposizione antecedente, ma una linea qualunque per generatrice.*

Sia $AXB$ (fig. 27) la generatrice della superficie, e $CD'D$ la linea situata nel piano ortografico e descritta dal punto $C$ del piano della $AXB$, ed a cui si mantiene costantemente perpendicolare il piano della stessa generatrice, senza punto rotare attorno la medesima, vale a dire la direttrice data; ed il punto $d$ rappresenti (fig. 28) l' ortografia dell' asse della superficie di rotazione generata dalla linea $AXB$ col rotare attorno la retta $BC$, posta col termine $C$ in $d$ e perpendicolare al piano ortografico.

Descritta l' ortografia $ik$ del contorno dell' ombra propria della superficie di rotazione colla regola esposta nell' ottava proposizione per delineare l' icnografia di queste superficie, condotte le normali $DG$, $D'G'$, - - alla $CE$, e ad esse le paralelle $dp$, $dp'$, - -, prese le $DP$, $D'P'$, - - eguali rispettivamente ai raggi vettori $dp$, $dp'$, - -, i punti $P$, $P'$, - - apparterranno alla richiesta ortografia.

Si facciano alle superficie due sezioni con piani perpendicolari all' ortografico, e condotti l' uno lungo la $DT$ normale della $CDE$, e l' altro per $td$ paralella alla stessa $DT$, e le due sezioni saranno evidentemente due linee perfettamente eguali alla generatrice $AXB$, e però anche fra loro; e dai punti ove queste linee segano gli estremi delle ombre proprie di queste superficie siano condotte due paralelle ai raggi di luce, e risulteranno queste tangenti alle medesime superficie, e conseguentemente le loro projezioni ortogonali sopra i piani delle sezioni rispettive saranno tangenti le stesse sezioni.

Posto ciò, suppongo che le due sezioni e le loro tangenti col rotare insieme attorno alle rette $DT$, $dt$ adattinsi al piano ortografico, e che siano rappresentate in queste nuove posizioni le sezioni dalle linee $GNB'$, $gnb'$, e le rispettive tangenti dalle rette $TN$, $tn$ tangenti in $N$, $n$ alle medesime linee $GNB'$, $gnb'$; e che siano condotte le $NP$, $np$ perpendicolari alle $DG$, $dg$; i punti $P$, $p$ apparterranno evidentemente alle ortografie dei contorni delle ombre proprie delle medesime superficie.

Essendo gli angoli $NTD$, $ntd$ eguali, e le linee $NG$, $ng$ eguali fra loro perfettamente, le due figure $DPGTNB'$, $dpgtnb'$ saranno esattamente sovrapponibili; e però eguali fra loro risulteranno tanto le ordinate $NP$, $np$, quanto le ascisse corrispondenti $DP$, $dp$ prese dai punti $D$, $d$; quindi ecc.

Osservazione 1. Descritta l' icnografia $zz$ dell' estremo dell' ombra propria della superficie di rotazione, proposizione ottava, e condotte le verticali $PVZ$, $P'V'Z'$, - - $pvz$, $p'v'z'$, - -, e prolungate le prime di $VZ$, $V'Z'$, - - rispettivamente eguali alle $vz$, $v'z'$, - -, i punti $X$, $Z$, $Z'$, - - apparterranno all' icnografia del contorno dell' ombra propria della superficie in quistione.

Di fatto essendo *pn* eguale alla *vz* ed anche alla *PN*, sarà $vz = PN$; ma acciò il punto *Z* della *PZ* perpendicolare alla *LM* sia nell' icnografia dimandata, basta che *VZ* eguagli *PN*; adunque per essere $VZ = vz$, $V'Z' =$ ecc.

Osservazione 2. La lunghezza della retta *DP* non varia, variando comunque la linea *CD* direttrice, purchè rimanga invariabile la *AXB* generatrice, e l' angolo che fa la *DT* normale col prolungamento della *AC*.

Osservazione 3. Se la linea *AXB* generatrice fosse di second' ordine, facendo di second' ordine anche la superficie di rotazione considerata in questa proposizione, l' ortografia del contorno della sua ombra propria, la quale sarà una linea generalmente della specie della generatrice stessa, si potrà determinare anche colle regole che si danno, parlando di queste superficie.

Osservazione 4. Ora dovrei esporre e dimostrare, pel caso che la linea *CDE* direttrice trovisi in un piano orizzontale, tutto ciò che ho dichiarato qui sopra, essendo la medesima linea nel piano dell' ortografia; ma siccome ciò mi obbligherebbe ad una ripetizione delle medesime cose dichiarate, così mi limiterò ad esporre la sola regola seguente per determinare l' icnografia e l' ortografia di un toro ordinario, nel caso che i raggi di luce abbiano la direzione che fissano generalmente i disegnatori, la quale è interessante per la sua semplicità.

*ALE* (tav. III, fig. 29) rappresenti l' ortografia del toro, ed *fe7* (fig. 15) la sua ortografia; e la retta *AE* sia omologa alla *AD* della figura sedicesima.

Si facciano gli angoli *dOc*, *cOh* semiretti (fig. 25), si prendano le rette *Od*, *Oh*, eguali ciascuna alla *AF* raggio del semicerchio generatore del toro, e le *Og*, *Os* che il quadrato di ciascuna eguagli la terza parte di quello della stessa *AF*, corollario secondo della proposizione terza; indi si descrivano sulle rette *dO*, *sO*, e sulle *Og*, *Oh* come semiassi le due semiellissi eguali *adc*, *fgh*; cioè se ne descriva uno di essi, e poscia ricopinsi opportunamente le sue parti nell' altra: fatto questo, si tirino le rette *OG*, *OL*, *OV*,--, prendansi le *nG*, *bL*, *vV*,-- eguali tutte alla *OF*, ed i punti *G*, *L*, *V* saranno dell' icnografia dimandata.

Per avere le ortografie corrispondenti conducansi le rette *1nr*, *b2p*, *vx3*,-- perpendicolari alla *AE*, si prendano le *v6*, *m1*, *x5*,-- nelle *Gv*, *Lm*, *Vx*,-- ed eguali alle *r1*, *2p*, *xy*,-- ordinate dell' altra ellisse *fgh*, che i punti *v*, *m*, *x*,-- apparterranno all' ortografia dimandata.

Così, se la generatrice *faf* (fig. 15) fosse un' ellisse avente per semiassi *aλ*, *fλ* e la direzione dei raggi qualunque, si troverebbero le due ellissi esprimenti l' ortografia e l' icnografia di un' ellissoide di rotazione posta col centro in *O*, ed avente l' asse verticale eguale alla *ff*, e l' orizzontale al doppio della *aλ*; e poscia si procederebbe alla delineazione dell' ortografia ed icnografia del contorno dell' ombra propria della superficie in quistione, precisamente come si è fatto sopra: e se la linea percorsa dal centro dell' ellisse generatrice non fosse circolare, descritte le due ellissi anzidette, procederebbesi alla determinazione delle projezioni del contorno dell' ombra colla regola che risulta, combinando quest' ultima coll' esposta nel corollario secondo della proposizione precedente, e facilissimamente immaginabile.

## Osservazione prima.

Tutto ciò che ho detto nella proposizione undecima per le superficie delle colonne spirali, si estenderà facilmente non solo a tutte le superficie spirali, ma anche a quella dell' ellissoide, dell' iperboloide a due foglie, della paraboloide ellittica, alle superficie di rotazione e de' canali aventi la direttrice piana, ponendo la retta $AB-aP$ nell' asse comune alla prima e seconda sezione per le prime tre, nell' asse di rotazione per le superficie di questo nome, e per quelle de' canali perpendicolare al piano della direttrice; e supponendo date in un piano perpendicolare a questa retta ed in uno paralello alla medesima, ciò che si è ammesso conosciuto nell' ortografico ed icnografico nelle proposizioni in cui ho parlato del contorno delle ombre proprie di queste medesime superficie.

## Osservazione seconda.

Sebbene colle regole esposte si possa determinare il contorno dell' ombra propria di una qualunque delle ordinarie superficie semplici che s' incontrano nelle belle arti, nulladimeno, perchè meno rimanga a desiderarsi rispetto alle ombre proprie, esporrò la soluzione analitica generale della proposizione enunciata al principio di questa parte, cioè una regola generalissima per determinare il contorno dell' ombra propria di qualsivoglia superficie, qualunque sia la direzione dei raggi di luce, colla quale si potranno scoprire agevolmente tutte le proprietà del contorno medesimo.

Siano $x$, $y$, $z$ le coordinate rettangole di un punto qualunque della superficie del corpo che impedisce il passaggio alla luce, ed $F(x, y, z)=0$ sia l' equazione di essa; ed $x'=az'$, $y'=bz'$ siano le equazioni della paralella ai raggi di luce che passa per l' origine delle coordinate, supposto rappresentate dalle $x', y', z'$ le coordinate rettangole di un punto qualunque di essa retta, e dalle $a$, $b$ i soliti parametri.

Così $p$, $q$ ed $r$ esprimano le tre analoghe coordinate di un punto qualunque del piano tangente la superficie data nel punto a cui corrispondono le coordinate $x, y, z$, e sarà

$$r-z=(p-x)\left(\frac{dz}{dx}\right)+(q-y)\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

l' equazione del piano stesso, e però

$$r'=p'\left(\frac{dz}{dx}\right)+q'\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

quella del suo paralello e che passa per l' origine delle coordinate: ammesso $p', q', r'$ le coordinate di un punto qualunque di questo medesimo piano.

Ora egli è una proprietà caratteristica dei punti del contorno dell' ombra propria che i piani tangenti in questi punti alla data superficie siano paralelli ai raggi di luce; e però la retta espressa dalle equazioni $x'=az'$, $y'=bz'$ sarà nel piano dato dalla

$$r'=p'\left(\frac{dz}{dx}\right)+q'\left(\frac{dz}{dy}\right);$$

o sia avranno luogo simultaneamente le tre equazioni seguenti:

$$p' = ar', \quad q' = br',$$

$$r' = p'\left(\frac{dz}{dx}\right) + q'\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Eliminando da queste tre equazioni le quantità $\frac{p'}{r'}$, $\frac{q'}{r'}$, si ha l'equazione

$$1 = a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

la quale, col porvi in vece di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, i loro valori $-\left(\frac{dF}{dx}\right):\left(\frac{dF}{dz}\right)$, $-\left(\frac{dF}{dy}\right):\left(\frac{dF}{dz}\right)$ dedotti dall' equazione $F(x, y, z) = 0$, si riduce alla seguente

$$\left(\frac{dF}{dz}\right) + a\left(\frac{dF}{dx}\right) + b\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0;$$

equazione che esprime una proprietà comune alle singole coordinate del contorno dell' ombra in quistione.

Ma il contorno dell' ombra propria del corpo che impedisce il passaggio alla luce si deve trovare anche nella superficie del corpo stesso; quindi il contorno medesimo sarà la linea che ha per equazioni

$$\left(\frac{dF}{dz}\right) + a\left(\frac{dF}{dx}\right) + b\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0, \; F(x, y, z) = 0.$$

Corollario. Supposto il piano delle ordinate $x, y$ orizzontale, e quello delle $x, z$ paralello all' ortografico, si avranno le equazioni dell' ortografia, dell' icnografia e del profilo del contorno dell' ombra, eliminando separatamente le quantità $y, z, x$ dalle due equazioni qui esposte del contorno stesso.

Esempio. La superficie che impedisce il passaggio alla luce sia la sferica, che ha il raggio eguale ad $r$, il centro nell' origine delle coordinate, cioè sia la sfera avente per equazione $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, e sarà

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2, \text{ e } \left(\frac{dF}{dx}\right) = 2x, \; \left(\frac{dF}{dy}\right) = 2y, \; \left(\frac{dF}{dz}\right) = 2z;$$

e però le equazioni del contorno dell' ombra propria di questa superficie saranno

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \; z + ax + by = 0.$$

La seconda di queste equazioni significa che il contorno trovasi in un piano che passa pel centro della sfera, ovvero che è la periferia di un cerchio massimo di essa, come risulta anche dal *lemma terzo*.

Eliminando separatamente $y, z, x$ dalle due equazioni qui trovate, si ottengono le

$$(1 + b^2) z^2 + 2abxz + (1 + b^2) x^2 - b^2 r^2 = 0,$$

$$(1 + b^2) y^2 + 2abxy + (1 + a^2) x^2 - r^2 = 0,$$

$$(1 + a^2) z^2 + 2abyz + (1 + a^2) y^2 - a^2 r^2 = 0,$$

le quali rappresentano ordinatamente l' ortografia, l' icnografia ed il profilo del contorno dell' ombra propria della sfera in quistione: esse equazioni esprimono che le medesime projezioni sono tre ellissi che hanno i centri nell' origine delle coordinate.

## Osservazione terza.

Le equazioni generali del contorno dell'ombra propria, trovate poc'anzi, insegnano che le proprietà di questi contorni dipendono dalla superficie che impedisce il passaggio ai raggi di luce e dalla direzione dei medesimi; più che le prime di queste proprietà sono di quelle colle quali si distingue una specie di linea da un'altra specie, e le seconde in vece di quelle che servono a distinguere le linee di una stessa specie. Quindi individuata la superficie che impedisce il passaggio alla luce, rimarrà individuata anche la specie delle linee rappresentanti i contorni delle sue ombre proprie; di modo che variando la sola direzione dei raggi di luce, varieranno bensì le linee rappresentanti i contorni delle sue ombre proprie, ma queste saranno tutte di una stessa specie o famiglia: interessante sarà conseguentemente la

## PROPOSIZIONE XV.

*Data la superficie che impedisce il passaggio ai raggi di luce, ed una linea in essa superficie, scoprire se questa possa rappresentare il contorno dell' ombra propria di essa superficie, e qual direzione dovrebbero avere all' uopo i raggi medesimi.*

Sia $f(x,y,z)=0$ l' equazione della linea data nella superficie espressa dall' equazione $F(x,y,z)=0$ pure data.

Chiamando $a$, $b$, come superiormente, i due parametri della paralella ai raggi di luce che passa per l' origine delle coordinate, le equazioni delle linee che possono rappresentare i contorni in quistione saranno

$$F(x,y,z)=0,\left(\frac{dF}{dz}\right)+a\left(\frac{dF}{dx}\right)+b\left(\frac{dF}{dy}\right)=0;$$

e però mediante un' opportuna determinazione delle quantità $a$, $b$ dovranno sussistere insieme le tre equazioni

$$F(x,y,z)=0,f(x,y,z)=0,$$

$$\left(\frac{dF}{dz}\right)+a\left(\frac{dF}{dx}\right)+b\left(\frac{dF}{dy}\right)=0$$

indipendentemente dalle variabili $x$, $y$, $z$.

Pertanto, eliminate due delle medesime variabili da esse equazioni, se la risultante si potrà soddisfare mediante un' opportuna determinazione dei parametri $a$, $b$ ed indipendentemente dalla variabile rimasta, la linea data nella superficie che impedisce il passaggio alla luce rappresenterà il contorno dell' ombra propria della medesima superficie, ed i raggi di luce saranno paralelli alla retta che passa per l' origine delle coordinate, e che ha per parametri i valori particolari di $a$, $b$ determinati per soddisfare la detta equazione risultante.

*Altra soluzione della medesima proposizione.*

Nell' equazione

$$r' = \left(\frac{dz}{dx}\right) p' + \left(\frac{dz}{dy}\right) q',$$

che rappresenta il piano passante per l' origine delle coordinate paralellamente al tangente la superficie data, considerando la $z$ funzione delle $x, y$, e la $y$ funzione della $x$, la sua derivata rispetto a quest' ultima variabile risulta

$$o = \left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\right\} p' + \left\{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\} q';$$

e però, se si sostituissero in questa e nella precedente in luogo di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$ i loro valori in $x, y$ cavati dall' equazione della superficie che impedisce il passaggio alla luce, e nelle risultanti in vece di $y$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ si ponessero i loro valori desunti dalla relazione stabilita, e poscia si eliminasse da queste ultime due la $x$, otterrebbesi una sola equazione, la quale sarebbe il luogo geometrico delle infinite rette, le cui equazioni si ottengono facendo variare la $x$ nelle equazioni anzidette o nelle loro equivalenti

$$q' = -p' \left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\right\} : \left\{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\},$$

$$r' = p' \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) - \left(\frac{dz}{dy}\right)\left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\right\} : \left\{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\}\right].$$

Ora, se la relazione stabilita fra $y$ ed $x$ sarà quella somministrata dal contorno dell' ombra propria, questo luogo geometrico dovrà essere la retta che passa per l' origine delle coordinate paralellamente alle rette generatrici della superficie involvente: quindi dovranno essere costanti le quantità che moltiplicano in queste ultime equazioni l' ordinata $p'$, o sia soddisfatte le due equazioni

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = a\left\{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\},$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) - a\left(\frac{dz}{dy}\right) = b$$

mediante determinazione opportuna delle costanti $a, b$, affinchè la linea data dall' equazione $f(x, y, z) = o$, e situata nella superficie espressa dalla $F(x, y, z) = o$, rappresenti il contorno dell' ombra propria di questa medesima superficie.

I valori delle costanti $a, b$ che soddisfaranno queste ultime equazioni, sostituiti nelle $q' = -ap'$, $r' = bp'$, daranno una retta paralella ai raggi di luce e passante per l' origine delle coordinate: $p', q', r'$ qui rappresentano le coordinate di un punto qualunque della medesima retta.

Esempio. Sia $x^2 + y^2 - 4z = o$ l' equazione della superficie che impedisce il passaggio alla luce, ed $y + x - 2 = o$ un' equazione del contorno dell' ombra che la superficie porta sopra sè stessa, l' altra essendo la medesima della superficie; e sarà

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x}{2}, \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = o, \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{y}{2}, \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{dy}{dx}\right) = -1.$$

Sostituendo questi valori nelle due equazioni di condizione, essi le riducono alle seguenti:

$$\frac{1}{2} = a \cdot -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - a\frac{y}{2} = b, \text{ o sia } a = -1, \text{ ed } (1 + a)x - 2a = 2b,$$

le quali danno $a = -1$, e $b = 1$. Quindi le due equazioni della retta che passa per l' origine delle coordinate, ed è paralella ai raggi di luce, saranno

$$q' = p', r' = p';$$

vale a dire, ammesso l' asse delle $z$ verticale e diretto dall' alto al basso, quello delle $x$ il comune ai piani ortografico ed icnografico, e diretto a destra, e quello delle $y$ diretto verso il disegnatore; affinchè il contorno dell' ombra propria della paraboloide di rotazione dato dall' equazione $x^2 + y^2 - 4z = 0$ abbia l' icnografia nella retta espressa dalla $y + x - 2 = 0$, i raggi di luce dovranno avere la direzione ordinaria.

## Osservazione quarta.

Quando sia già noto che la linea data nella superficie che impedisce il passaggio alla luce rappresenti effettivamente il contorno dell' ombra propria della medesima superficie, la direzione dei raggi di luce si potrà anche determinare colle cose esposte nelle proposizioni dichiarate relativamente alla determinazione delle stesse ombre proprie.

*Ad esempio: la linea* IMZ *(fig. 16) esprime l' icnografia dell' ombra propria del toro rappresentato dalle figure quindicesima e sedicesima; qual sarà la direzione dei raggi di luce?*

Dal punto *Q*, dove l' icnografia *IMZ* tocca la periferia *AQE*, si tiri la retta *QCG*, e ad essa la perpendicolare *CV*; quest' ultima sarà l' icnografia di una retta paralella ai raggi di luce.

Facciasi *CG* eguale alla *AF*, descrivasi col centro *G* l' arco circolare *CsL*, si prenda *GJ* eguale alla *V*9, tirisi *JL* perpendicolare alla stessa *CG*, congiungasi *GLH*, e sarà *GHC* l' angolo che fanno i raggi di luce col piano icnografico:

I raggi di luce adunque debbono essere paralelli alla retta che ha *CV* per icnografia, e che fa con questa un angolo eguale al *GHC*. Volendo l' ortografia di questa paralella ai raggi di luce, essa si otterrà colla regola esposta nel corollario della proposizione dichiarata al paragrafo sesto della prima parte.

In ultimo egli è evidente che se la linea rappresentante il contorno dell' ombra propria di una data superficie sarà una retta, infinite saranno le direzioni che potranno avere i raggi di luce, come risulta dalle due prime proposizioni.

## Osservazione quinta.

A compimento di quanto ideai d' esporre in questa parte, dichiarerò qui brevemente i principj generali, dai quali discendono tutte le regole grafiche esposte, e coi quali potrà chiunque istradarsi, volendo delineare il contorno dell' ombra propria di qualunque altra superficie.

Per determinare il contorno dell' ombra propria di una superficie si osservi se avvi un' altra superficie, di cui si conosca già l' analogo contorno, la quale tocchi la proposta per tutta l' estensione di una linea, e che movendosi opportunamente col variare, se occorre, le sue dimensioni, continui a toccare similmente la proposta medesima, e che la linea variabile del contatto passi per tutti i punti di questa superficie: scoperta tale superficie e la legge del suo movimento, agevolmente si concepirà anche la regola per delineare il contorno richiesto. Imperciocchè questo contorno e l' analogo della superficie mobile considerata in una qualunque sua posizione s' intersecheranno in un punto della linea di contatto fra le due superficie medesime; e però, determinato il segamento fra il contorno dell' ombra propria della superficie mobile, considerata in una sua posizione, e la linea di contatto fra essa e la proposta linea anch' essa conosciuta pel movimento suddetto, questo segamento sarà un punto del contorno desiderato; e conseguentemente nella ripetizione della regola usata per determinarlo si avrà quella per delineare il contorno medesimo. Da questo principio io dedussi le regole per delineare i contorni delle ombre proprie delle superficie di rotazione, spirali e de' canali.

Un altro principio per avviarsi nella ricerca del contorno dell' ombra propria di qualunque superficie è quello di fare a questa superficie tante sezioni piane paralelle ai raggi di luce quanti sono i punti che si vogliono del contorno stesso; indi trovare i punti di contatto fra queste sezioni e le loro tangenti paralelle alla $O-I$, e poscia trasportare opportunamente le projezioni di questi punti nel disegno, ovvero di disegnare le projezioni ortogonali delle sezioni medesime sul piano nel quale vuolsi l' analoga projezione del contorno dell' ombra, e poi determinare i punti di contatto fra queste projezioni e le loro tangenti paralelle alla projezione ortogonale della $I-O$ e fatta sul medesimo piano, giacchè questi punti di contatto sono altrettanti punti della projezione dimandata del contorno dell' ombra propria in quistione.

### Osservazione sesta.

Siccome un piano esposto ai raggi di luce e non paralello ai medesimi risulta da una banda tutto illuminato, e dall' altra tutto in ombra, ed il disegno di un piano rappresenta propriamente una sola delle sue facce; così la porzione di un disegno rappresentante un piano contornato dovrassi ombreggiare ovvero lasciare in luce, secondo che esso esprimerà di esso piano la faccia illuminata ovvero l' altra. Ma fissata la posizione sì del piano obbiettivo che di quello in cui è fatto il suo disegno, non che una retta

paralella ai raggi di luce e la banda dalla quale essi raggi arrivano, rimane evidentemente deciso se debbasi o no ombreggiare il disegno del medesimo piano; pertanto utilissima sarà pei disegnatori la

## PROPOSIZIONE XVI.

*Scoprire se debbasi ombreggiare ovvero lasciare in luce si l'ortografia che l' icnografia di un piano, essendo date le sue tracce ortografica ed icnografica, e fissata non solo la paralella ai raggi di luce, ma ben anche la parte dalla quale essi raggi pervengono.*

Sia *CAm* (tav. V, fig. 30) la traccia icnografica, ed *AB* l' ortografica del piano, *GS* l' icnografia, e *gs* l' ortografia di una paralella ai raggi di luce, e questi siano diretti da *G* — *g* verso *S* — *s*, e la *LM* secondo il solito esprima l' asse comune ai piani coordinati ortografico ed icnografico.

Si conduca dal punto *D* della traccia *CA* la *FDf* perpendicolare all' *LM*, dall' *F* della *fDF* ed anteriore allo stesso *D* si tiri la *ICFE* paralella alla *I*, e dal segamento *f* la *if* paralella alla *O*: eseguito questo, tirinsi dai segamenti *C*, *E* le *Cc*, *Eg* perpendicolari alla *LM*, ed uniscansi i punti *c*, *g*; il punto *H* comune alle rette *cg*, *if* trovandosi, per rispetto all' *f*, dalla banda da cui pervengono i raggi di luce o sia nella retta *if* terminata in *f*, il disegno ortografico del piano dato si dovrà ombreggiare. All' opposto, se il punto *H* risultasse nella *fH'* prolungamento della *if*, converrebbe lasciare il disegno medesimo in luce.

Così dal punto *g* della traccia ortografica del piano dato si tiri *NgE* perpendicolare alla *LM*, dal segamento *E* la *IER* paralella alla *I*, e dal punto *N* situato nella *EN* e superiore al *g* conducasi la *TNpM* paralella alla *O*; indi dai segamenti *p* ed *M* tirinsi le *pP*, *Mm* perpendicolari anch' esse alla *LM*, e congiungasi *Pm*: quest' ultima retta segando la *IER* nel punto *R* che trovasi, rispetto all' *E*, verso la parte opposta da cui arrivano i raggi di luce o sia nel prolungamento della *IE* terminata in *E*, insegna che l' icnografia del piano dato sarà in luce; che se il punto *R* si trovasse, rispetto all' *E*, dalla banda stessa da cui pervengono i raggi medesimi, l' icnografia si dovrebbe ombreggiare.

Per un punto fissato nello spazio a cui è voltata la faccia del piano obbiettivo rappresentata dall' ortografia di esso piano s' immagini la retta paralella ai raggi di luce, e diretta pel verso da cui essi arrivano: se il piano obbiettivo sarà incontrato da questa retta, i raggi di luce percoteranno contro la faccia del piano opposta a quella voltata al punto stesso fissato, per cui rimarrà questa in ombra; quindi in ombra dovrà essere anche l' ortografia di essa faccia o sia del piano. Pel contrario, se il piano obbiettivo sarà incontrato in vece dal prolungamento della medesima retta, i raggi di luce illumineranno la faccia del piano obbiettivo voltata verso il punto fissato; e però si dovrà lasciare in luce l' ortografia della faccia medesima o sia del piano obbiettivo stesso.

Ma le ortografie del punto fissato e dell' incontro del piano obbiettivo colla retta immaginata hanno nell' ortografia di questa retta una correlativa disposizione affatto affatto simile a quella che hanno i medesimi punti sulla retta stessa; adunque se l' ortografia dell' incontro anzidetto sarà in quella della retta immaginata, l' ortografia del piano ombreggerassi, altrimenti si lascerà in luce.

Ora essendo il punto $F$ nella retta $FDf$ ed anteriore al $D$ della medesima, trovasi collocato nello spazio a cui è voltata la faccia del piano $CAB$ espressa nell' ortografia di esso piano; e però questo potrà esprimere il punto fissato suddetto. Così per essere le $if$, $IF$ l' ortografia e l' icnografia della paralella ai raggi di luce tirata per lo stesso punto $F$ ovvero $F-f$, e le $Cc$, $Eg$ perpendicolari alla $LM$, il segamento delle $if$, $cg$, cioè il punto $H$, sarà l' ortografia del punto d' incontro del piano obbiettivo dato e della retta $IF-if$.

Quindi, siccome i raggi di luce sono diretti da $I-i$ verso $F-f$, l' ortografia del piano $ACB$, come anche quella di qualunque sua porzione si dovrà ombreggiare; giacchè il punto $H$ risulta nella $if$ ortografia della paralella ai raggi di luce tirata pel punto $F-f$ verso la parte da cui pervengono i raggi medesimi.

Facendo per l' icnografia, e propriamente pel punto $N-E$ tutto ciò che si fatto per l' ortografia o sia pel punto $F-f$, si conclude che l' icnografia del piano $CAB$ devesi lasciare in luce, perchè il segamento $R$ trovasi nel prolungamento dell' icnografia $IE$ della paralella ai raggi di luce tirata pel punto $E-N$, verso la parte dalla quale arrivano i raggi medesimi.

Così, se il punto $H$ risultasse nel prolungamento della $if$, si lascerebbe in luce anche l' ortografia del piano in quistione; e se $R$ cadesse nella $EC$, in vece si acquerellerebbe anche l' icnografia.

Osservazione. Potrei esporre, rispetto ad alcune particolari superficie cilindriche, coniche ed altre, delle considerazioni analoghe a quelle qui esposte pei piani; ma siccome rarissimi sono i casi in cui queste superficie siano disposte per modo che risultino da una banda tutte illuminate, e dall' altra in ombra; così passerò in vece a parlare delle ombre portate.

# PARTE TERZA.

## DEI CONTORNI DELLE OMBRE PORTATE.

Se si estendesse la superficie involvente sino al corpo sulla cui superficie si rende visibile l'ombra portata, essa la segherebbe lungo il contorno di quest' ombra medesima. Ma se una retta mobile e paralella ai raggi di luce, nel muoversi, incontra costantemente il contorno dell' ombra propria, essa genera la stessissima superficie involvente; adunque il contorno dell' ombra portata rappresenterà l' ombra stessa che cagionerebbe il contorno della propria. Quindi determinato che si avrà il contorno dell' ombra propria, qualora non sia già noto per la natura medesima della quistione, si potrà nella delineazione del contorno dell' ombra portata prescindere affatto dal corpo che impedirà il passaggio ai raggi di luce, considerando questo contorno come l' ombra portata dal primo.

In virtù di questa proprietà, le quistioni che hanno per oggetto la delineazione dei contorni delle ombre portate si riducono alla seguente proposizione puramente geometrica: « *Date due superficie, delle quali una sia la involvente stessa, trovare la loro intersecazione* », ed a questa appunto riduconsi le proposizioni che espongo in questa parte, ordinate secondo le differenti superficie sulle quali si rendono visibili le ombre portate.

### DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE PIANE.

### PROPOSIZIONE I.

*Trovare l' ortografia e l' icnografia dell' ombra portata da una retta su di un piano, conoscendosi l' ortografia e l' icnografia della retta medesima, e le tracce ortografica ed icnografica del piano.*

Siano $CF$, $CE$ (fig. 31) le tracce del piano dato, ed $AB$, $ab$ l' icnografia e l' ortografia della retta che cagiona l' ombra.

Condotte le $ARG$, $BSH$ paralelle alla $I$, le $Aa$, $Bb$, $Rr$, $Ss$, $Gg$, $Hh$ perpendicolari alla $ML$, le $aq$, $bp$ paralelle alla $O$; e congiunte $rg$, $sh$, e tirate le $qQ$, $pP$ perpendicolari anch' esse alla $ML$; nelle rette $PQ$, $pq$ che

passano pei segamenti $P$, $Q$, $p$, $q$, così determinati, avransi l' ortografia e l' icnografia richieste.

Tutte le rette paralelle ai raggi di luce e che incontrano la $AB-ab$ sono nel piano che passa per questa retta paralellamente ai raggi medesimi, e però l' ombra in quistione dovrà essere in questo piano e nel dato; sarà essa adunque la retta loro sezione comune.

La retta $BP-bp$ titata dal punto $B-b$ dell' obbiettiva essendo paralella ai raggi di luce, e le $Ss$, $Hh$ perpendicolari alla $ML$, il punto $p$, segamento delle $bp$, $sh$, sarà l' ortografia dell' incontro fra il piano dato e la stessa $BP-bp$, ed il $P$ l' icnografia del medesimo. Similmente $Q-q$ rappresenterà l' incontro dello stesso piano dato colla retta $AQ-aq$ tirata dal punto $A-a$ dell' obbiettiva paralellamente ai raggi di luce; vale a dire saranno $P-p$, $Q-q$ i punti del piano avente le tracce $CF$, $CE$, nei quali cadranno le ombre portate dai punti $B-b$, $A-a$ della retta obbiettiva.

Ora i punti $P-p$, $Q-q$ trovandosi nelle rette $BP-bp$, $AQ-aq$, e però nel piano che passa per la $AB-ab$ paralellamente ai raggi di luce ed anche nel piano dato, apparterranno essi alla sezione di questi due piani, e conseguentemente alla retta che rappresenta l' ombra in quistione. Quindi $PQ$, $pq$ icnografia ed ortografia della retta che passa pei punti $P-p$, $Q-q$ saranno, la prima l' icnografia, e la seconda l' ortografia dimandate.

Corollario i. Se il piano dato sarà verticale, le $hH$, $gG$ risulteranno paralelle alla $CF$; e però le $sh$, $rg$ saranno i prolungamenti delle stesse $Rr$, $Ss$.

Pertanto (fig. 32), condotte le $AR$, $BS$ paralelle alla $I$, le $Aa$, $Bb$, $Rr$, $Ss$ perpendicolari alla $ML$, e le $aq$, $bp$ paralelle alla $O$, si avranno immediatamente in $p$, $q$ due punti dell' ortografia richiesta: l' icnografia sarà la stessa $CE$.

La regola qui dichiarata essendo affatto indipendente dalla traccia $CF$, essa varrà anche pel caso che il piano dato sia paralello o si confonda collo stesso ortografico. In quest' ultimo caso, frequentissimo in pratica, le operazioni necessarie per avere l' ortografia dell' ombra portata sul piano ortografico della retta $AB-ab$, comunque situata nello spazio, sono indicate dalla figura trentatreesima.

Ritenuto che il piano sul quale cade l' ombra sia lo stesso ortografico, e supposto che la luce abbia la direzione ordinaria; condotta l' orizzontale $bv$ (fig. 33) sino ad incontrare il prolungamento della verticale $Sp$, si avranno le rette $vp$, $vb$, $TS$, $TB$ eguali fra loro; cioè l' orizzontale $bv$ e la verticale $vp$ entrambi eguali alla $BT$, che esprime l' aggetto o la distanza del punto $B-b$ dal piano ortografico.

Quindi, in questa ipotesi, tirata l' orizzontale $bv$, e poi la verticale $vp$ eguali amendue all' aggetto che ha il punto $B-b$ della retta obbiettiva dal piano ortografico, avrassi immediatamente il punto $p$; e così facendo anche per un altro punto $A-a$ della medesima obbiettiva, si otterrà il corrispondente punto $q$, e conseguentemente in un tratto la retta $pq$ senza verun bisogno dell' icnografia $AB$.

Osservazione i. Quando la retta obbiettiva sarà paralella al piano ortografico, e questo sia il piano stesso su cui cade l' ombra, l' ortografia dell' ombra o sia l' ombra stessa sarà una retta paralella alla $ab$; e però basterà trovare uno dei due punti $p$, $q$, giacchè tirando per questo la paralella alla $ab$, si avrà in essa l' ortografia dimandata.

Se l' obbiettiva, oltre di essere paralella al piano ortografico su cui cade l' ombra, sarà anche orizzontale; più nel piano ortografico vi sia disegnata una verticale *ab* (fig. 34), e nel prolungamento *BC* dell' ortografia *AB* abbiasi la distanza che ha la retta obbiettiva medesima dal piano ortografico, ciò che succede spesso per gli angoli delle fabbriche:

Condotta *CP*, che faccia l' angolo *PCB* semiretto, e poscia l' orizzontale *PQ*, in questa avrassi immediatamente l' ombra cercata, nell' ipotesi che la luce abbia la direzione ordinaria.

Così se l' ortografia data, in vece di essere l' orizzontale *AB*, fosse la verticale *ab*;

Tirata la *qp* paralella alla stessa *ab*, e distante da questa quanto l' aggetto della medesima obbiettiva dal piano ortografico, avrebbesi nella *pq* l' ombra dimandata.

Osservazione 2. Qualunque sia la posizione del piano su cui cade l' ombra, se la retta obbiettiva lo incontrerà, e sarà nota sì l' ortografia che l' icnografia dell' incontro; congiunta questa ortografia (fig. 31) col punto *p*, e l' icnografia col *P*, determinati ambidue superiormente, avrassi nella prima retta l' ortografia, e nella seconda l' icnografia dell' ombra portata sul piano dato dalla retta *AB* — *ab*, senza determinare i punti *q*, *Q*.

Corollario 2. Ammesso il piano dato perpendicolare all' ortografico (fig. 35), ed anche l' icnografico stesso (fig. 36), si troverà *PQ* icnografia dell' ombra portata dalla data retta *AB* — *ab*, facendo per l' ortografia *ab* ciò che si è fatto per l' icnografia *AB* nel corollario primo per avere *pq* (fig. 32);

Cioè condurransi le *ar*, *bs* paralelle alla *O*, le *aA*, *bB* perpendicolari alla *ML*, le *AQ*, *BP* paralelle alla *I*; in fine si tireranno le *rQ*, *sP* anch' esse perpendicolari alla *ML*, e nei segamenti *P*, *Q* avransi due punti dell' icnografia *PQ* dimandata.

Se i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, ed il piano su cui cade l' ombra sia l' icnografico; condotta *AV* (fig. 36) paralella alla *ML*, ed estesa sino ad incontrare il prolungamento della *rQ*, si avrà evidentemente *QV* eguale a ciascuna delle *VA*, *Tr*, *Ta*;

E però tirando dal punto *A* della *AB*, icnografia dell' obbiettiva, la *AV* paralella alla *ML*, indi *VQ* perpendicolare alla stessa, ed ambi eguali alla *Ta*, cioè all' altezza che avrà il punto *A* — *a* sopra il piano icnografico, e facendo altrettanto per un altro punto *B* della stessa *AB*, e congiunti i punti *P*, *Q*, si avrà nella *PQ* l' icnografia richiesta.

Qualunque sia la direzione dei raggi di luce, se il piano dato sarà l' icnografico, e la retta obbiettiva paralella ad esso; trovato uno dei punti *P*, *Q*, tirando per esso una paralella alla *AB*, avrassi immediatamente l' ombra portata dalla retta *AB* — *ab*, perchè il piano che passa lungo la retta *AB* — *ab* paralellamente ai raggi di luce sega l' icnografico in una retta paralella alla stessa *AB* — *ab*, e però alla sua icnografia *AB*.

Corollario 3. Se *A* — *a*, *B* — *b* rappresenteranno i termini della retta obbiettiva, i punti *p*, *q* saranno quelli dell' ortografia, e *P*, *Q* dell' icnografia dell' ombra portata da essa obbiettiva sul piano dato.

Osservazione 3. Conoscendosi l' ortografia e l' icnografia di un corpo di facce piane, e volendo l' ortografia e l' icnografia dell' ombra portata da esso sopra di un dato piano,

Si troveranno le ortografie ed icnografie delle ombre portate da tutte quelle rette terminate che esprimeranno gli spigoli di esso corpo, e nel poligono costituito da alcune di queste icnografie, ed entro cui cadranno le altre, si avrà l'ortografia richiesta, come nell' analogo poligono formato da varie icnografie avrassi la corrispondente e voluta icnografia.

## PROPOSIZIONE II.

*Date le tracce ortografica ed icnografica di un piano, e l'ortografia e l'icnografia di una curva qualunque, trovare l'ortografia e l'icnografia dell' ombra portata da questa curva sul piano.*

Siano *abc*, *ABC* l' ortografia e l' icnografia ( fig. 37 ) della linea che cagiona l' ombra, e *CF*, *CE* le tracce del piano su cui cade la medesima.

Facciasi *BG* paralella alla *I*, le *Bb*, *Dd*, *Gg* perpendicolari all' asse *ML*, e trovisi *n* segamento della *dg* colla *bn* paralella alla *O*, e sarà *n* un punto dell' ortografia *pnq* dimandata. Così, tirando la *nN* anch' essa perpendicolare alla *ML*, nel segamento *N* si avrà un punto dell' icnografia *PNQ* richiesta: tutto è per sè evidente.

Osservazione 1. Quanto alle semplificazioni che si possono fare alla regola qui esposta per la determinazione dei punti *n*, *N* e di tutti gli analoghi, nel caso che il piano dato, cioè quello sul quale cade l' ombra, sia paralello all' ortografico od all' icnografico, ovvero si confonda con uno di questi, si veggano i corollarj primo e secondo dell' antecedente proposizione, i quali si estendono a questa proposizione senza verun cambiamento.

Osservazione 2. Allorchè la linea obbiettiva sarà piana e paralella al piano ortografico, o sia la sua icnografia sia una retta *AC* ( fig. 38 ) paralella all' asse *ML*, i triangoli *bmn*, *b'm'n'*, -- formati dalle orizzontali *mn*, *m'n'*, --, dalle verticali *bm*, *b'm'*, -- e dalle *bn*, *b'n'*, -- paralelle alla *O*, i quali sono sempre simili, saranno anche eguali, per l' egualianza dei *TBd*, *T'B'd'*, -- che ha luogo in questo caso; e però le rette *bn*, *b'n'*, -- saranno fra loro paralelle ed eguali.

Quindi, determinato uno dei punti *n*, *n'*, --, si avrà l' ortografia richiesta, copiando in *pnq* opportunamente la stessa linea obbiettiva *abc*, ovvero tirando dai punti della *abc* delle rette eguali e paralelle alla *bn*; giacchè gli altri estremi di queste risulteranno nella stessissima ortografia dimandata.

Così, se la linea obbiettiva sarà paralella al piano icnografico, trovato un punto dell' ombra portata da essa su questo piano, si avranno in un tratto anche gli altri, ecc.

Osservazione 3. Se la linea obbiettiva sarà in un piano perpendicolare all' asse *ML*, non si potrà soddisfare la proposizione colla regola anzi esposta. In questo caso, rappresentata colla *EF* ( fig. 39 ) la sezione fatta al piano ortografico da quello della stessa obbiettiva, e supposto questa linea adattata in *ABC* al piano ortografico mediante una rotazione fatta attorno alla *FE* medesima, per avere l' ortografia e l' icnografia dell' ombra portata da essa linea sul piano avente per traccia ortografica *OG*, ed icnografica *Og*;

Si farà $Fb$ eguale alla orizzontale $BE$, $bdg$ paralella alla $I$, le $dD$, $gG$ perpendicolari alla $ML$, e si determinerà $n$ segamento della $DG$ e della $En$ condotta paralellamente alla $O$, indi si condurrà $nN$ perpendicolare essa pure alla $ML$, e si avrà in $n$ un punto dell' ortografia $qnp$, ed in $N$ uno dell' icnografia dimandate.

Imperciocchè, essendo $Fb$ perpendicolare alla $ML$ ed eguale alla $BE$, saranno $E$, $b$ l' ortografia e l' icnografia del punto dell' obbiettiva che cade in $B$ dopo la detta rotazione; e però, siccome la $gb - En$ è paralella ai raggi di luce, e le $dD$, $gG$, $Nn$ sono perpendicolari alla $ML$, sarà $N - n$ il punto del piano avente le tracce $OG$, $Od$, nel quale cadrà l' ombra che porterà il punto $B$ dell' obbiettiva.

Osservazione 4. Le projezioni della linea che cagiona l' ombra e le tracce del piano sul quale vien portata la medesima si possono supporre disposte talmente, che i raggi di luce incontrino il piano prima della linea stessa: in questo caso, benchè la quistione esprima geometricamente qualche cosa di reale, ciò non ostante è dessa assolutamente immaginaria sotto a quell' aspetto che si considera in questo luogo.

Similmente, se l' ortografia e l' icnografia del piano dato trovansi ambedue od una di esse in ombra, per l' acquerellamento sarà affatto inutile la determinazione dell' analoga projezione dell' ombra portata sul piano medesimo.

Pertanto il disegnatore, prima d' incominciare la delineazione delle projezioni di queste e simili ombre portate, dovrà porsi al fatto di queste accidentalità: si porrà al fatto della prima con uno di quei metodi che naturalmente gli si presenteranno, e della seconda mediante l' ultima proposizione trattata nella parte precedente.

## DE' CONTORNI

### DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE CILINDRICHE.

Quantunque potrei incominciare a parlare de' contorni delle ombre che accadono sulle superficie cilindriche coll' esporre e dimostrare immediatamente l' ultima proposizione che do rispetto ad esse, e poscia dedurre tutte le altre proposizioni, quai corollarj, col fare alcune restrizioni relative ed alle superficie ed alla linea che porta l' ombra su di essa superficie; nulladimeno, siccome con ciò poco o nulla guadagnerei in semplicità, e forse perderei in chiarezza, così io seguirò l' ordine totalmente contrario, cioè incomincerò ad esporre quei casi che s' incontrano più spesso nelle arti, e pei quali sono individuate sì la superficie che la linea che cagiona l' ombra; indi togliendo di mano in mano certe limitazioni, ora alla superficie ed ora alla linea portante l' ombra, finalmente giugnerò insensibilmente alla suddetta proposizione, la quale è senza dubbio la più generale che si possa mai desiderare a questo proposito.

## PROPOSIZIONE III.

*Determinare l'ortografia dell'ombra che accade nella mezza superficie cilindrica, che ha per ortografia il rettangolo* fMLh (fig. 40) *avente i lati* fM, hL *verticali, e per icnografia la semiperiferia circolare* anc *descritta sulla* ac *paralella al piano ortografico.*

Si descriva la semiperiferia circolare *abc*, e dal suo punto *b* di mezzo e dall' *a* si tirino le *bd*, *ae* paralelle all' *I*, e dal punto *f* e dal *g* di mezzo della *fh* le *fx*, *gz* paralelle alla *O*, e si estendano queste sino ad incontrare le verticali *xk*, *zl*, i cui prolungamenti passano pei segamenti *d*, *e*: fatto ciò, descrivasi l' arco *xm* dell' ellisse che ha *gx*, *gz* per due semidiametri conjugati, *lemma quattordicesimo*, e sarà *Mfmxk* l' ortografia dimandata.

Essendo la data superficie e la involvente amendue di second' ordine, e la periferia circolare ed orizzontale, che ha per diametro *ac* — *fh*, una delle linee comuni ad esse, l' altra linea comune alle medesime superficie, cioè il contorno dell' ombra portata in quistione, sarà una periferia ellittica, come si vede al *lemma tredicesimo*; e però tale sarà anche in generale la sua ortografia.

Condotte dai termini *c* ed *n* dei diametri *ac*, *bn* fra loro perpendicolari le *cp*, *no* paralelle anch' esse alla *I*, e dai punti *p* ed *o* le rette *pr*, *oq* paralelle alla *fM*, ed estese sino ad incontrare i prolungamenti delle due *xg*, *zg*, avrassi evidentemente $rg = xg$, $gq = gz$; cioè le corde *rx*, *zq* dell' ortografia si segheranno in parti eguali in *g*, e conseguentemente sarà *g* il centro dell' ellisse *xzrq*, e le medesime corde due diametri conjugati di essa.

Conducendo lungo *fx* il piano perpendicolare all' ortografico, esso passerà evidentemente per un lato della superficie involvente e per la tangente orizzontale di essa che passa pel punto *f*; e però sarà esso tangente anche l' altra linea comune alle due superficie cilindriche. Quindi per essere questo piano perpendicolare all' ortografico, la retta *fx* risulterà tangente la periferia ellittica *xzrq*, e per conseguenza i due suoi diametri *qz*, *rx* saranno fra loro conjugati; come si è detto.

Ma egli è evidente che la retta *xk* rappresenta l' ortografia dell' ombra portata dalla *fM* — *a*; adunque il contorno dell' ortografia dimandata sarà *mxk*, e conseguentemente lo spazio che si dovrà ombreggiare *Mfmxk*.

Corollario 1. Conducasi il diametro *vs*1 paralello alla *I*, si tirino le *v*2, 14, *p*3 perpendicolari alla *fh*, e le 24, 35 paralelle alla *gz*, e si avrà in 5 il punto di contatto fra l' ellisse *qxzr* e la verticale *hL*, ed in 4 il punto più abbasso della medesima periferia ellittica.

Corollario 2. Tirando il raggio *st* perpendicolare alla *ae*, e dal punto *t* la *tm* paralella alla *fM*, *m* segamento di questa retta colla *fh* sarà il punto medesimo dove la periferia ellittica *xzrq* segherà la stessa retta *fh*.

Corollario 3. Se i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, i punti *e*, *d* cadranno negli *n*, *c*, e gli angoli *zgh*, *xfh* saranno semiretti; e però (fig. 41)

Prese le verticali *xg*, *hz* eguali amendue alla *fg*, saranno *gz*, *gx* due semidiametri conjugati dell' ortografia dimandata.

In questo caso, estesa $zg$ verso $q$, descritto l' arco circolare $\lambda\beta\mu$ col centro $g$ e col raggio eguale alla $gz$, condotta la verticale $\delta\alpha$ e l' orizzontale $\alpha\beta$ dai termini della $\delta\beta$ perpendicolare al prolungamento della $zg$, $\alpha$ segamento di queste rette sarà un punto della periferia ellittica dimandata pel *lemma quattordicesimo* stesso.

Così, fatta $gq$ eguale alla $gf$, e tirata $qm$ perpendicolare alla $fh$, avrassi immediatamente $m$ termine superiore dell' arco ellittico in quistione.

## PROPOSIZIONE IV.

*Una semisuperficie cilindrica avente le rette generatrici verticali ha il rettangolo* fhLM (fig. 42) *per ortografia, e per icnografia la semiellisse* MnL, *i cui assi sono le* ML, nb; *qual sarà l' ortografia dell' ombra che portano i contorni di questa superficie sopra di essa medesima?*

Si determinino i punti $d$, $e$, *lemma quindicesimo*, ove le rette condotte per gli $M$, $b$ paralellamente alla $I$ segherebbero la periferia ellittica avente per assi $ML$, $bn$, e da questi punti si tirino le $dz$, $ex$ paralelle alle $Mf$, e prolunghinsi sino ad incontrare le $gz$, $fx$ paralelle alla $O$, e si avranno nelle $gx$, $gz$ due semidiametri conjugati della periferia ellittica di cui è parte $mx$ porzione curvilinea dell' ortografia dimandata $fmxk$, l' altra parte di questa ortografia essendo evidentemente la stessa verticale $xk$.

Non espongo la dimostrazione di questa proposizione, perchè sarebbe essa una vera ripetizione di quella della proposizione antecedente.

## PROPOSIZIONE V.

*Una porzione di superficie cilindrica parabolica avendo per ortografica il rettangolo* abLM (fig. 43), *che ha i lati* bL, aM *verticali, e per icnografia il segamento parabolico ordinario* erg, *di cui è data l' altezza* rh, *e la corda* ehg *paralella alla* LM; *determinare anche per questa superficie l' ortografia dell' ombra che portano i suoi contorni sopra di essa, nella ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.*

Si determini il punto $i$, *lemma sedicesimo*, dove il lato $ie$ dell' angolo semiretto $gei$ incontrerebbe la parabola di cui si conosce l' asse, il vertice ed anche il punto $e$, e tirisi la $iqp$ paralella alla $bL$: secondo questa retta cadrà evidentemente l' ortografia dell' ombra che porta la generatrice avente $aM$ per ortografia. Indi si estenda la $hr$ in $m$ ed $l$, conducasi la $el$ perpendicolare alla $re$, prendasi $om = \frac{1}{2} mn = \frac{1}{2} hl$, e si congiunga la retta $onp$, e sarà $op$ la rimanente porzione dell' ortografia dimandata.

Denominate $x$, $y$, $z$ le coordinate di un punto qualunque di una paralella ai raggi di luce, e supposta l' origine di essè nel vertice della parabola contorno superiore della superficie cilindrica data, la $z$ diretta verticalmente dall' alto al basso, la $y$ secondo l' asse della parabola stessa, e la $x$ a destra e perpendicolare alle prime due, saranno

$$y = -x + A, \; z = x + B$$

le equazioni della medesima retta paralella ai raggi di luce, $A$, $B$ indicando i soliti due parametri. Così nominate $x_{,}$, $y_{,}$ le coordinate di un punto qualunque della parabola anzidetta ed analoghe alle $x$, $y$ antecedenti, e $p$ il parametro della medesima parabola, sarà $x'^2 = py'$ la sua equazione; cioè quella della sezione della superficie cilindrica che ha per ortografia la retta *ab*.

Ponendo nelle equazioni della retta paralella ai raggi di luce, in vece delle coordinate $x$, $y$, $z$, rispettivamente $x_{,}$, $y_{,}$, $0$, se ne ottengono due altre, che danno

$$A = x_{,} + y_{,}, \text{ e } B = -x_{,};$$

e però le equazioni di una retta generatrice della superficie involvente saranno le seguenti

$$y - y_{,} = -x + x_{,}, \; z = x - x_{,}.$$

Da queste due ultime equazioni si desume $x_{,} = x - z$, ed $y_{,} = y + z$; valori i quali, sostituiti nell' equazione $x_{,}^2 = py_{,}$, somministrano

$$(x - z)^2 = p(y + z)$$

per equazione della stessa superficie involvente.

Essendo quest' ultima l' equazione della superficie involvente, ed $x^2 = py$ evidentemente quella della cilindrica data, supposte $x$, $y$ le sue coordinate, saranno

$$(x - z)^2 = p(y + z), \; x^2 = py$$

le equazioni delle due linee comuni a queste due superficie.

Ma eliminando la $y$ da queste due equazioni, si ottiene la sola

$$z(z - 2x - p) = 0,$$

la quale si decompone nelle due $z = 0$, $z - 2x - p = 0$; adunque una delle sezioni sarà rappresentata dalle equazioni

$$z = 0, \; x^2 = py, \text{ e l' altra dalle due } z - 2x - p = 0, \; x^2 = py.$$

Egli è evidente che la prima di queste sezioni è la stessissima che ha la retta *ab* orizzontale per ortografia; adunque le due altre equazioni

$$z^2 - 2x - p = 0, \; x^2 - py = 0$$

rappresenteranno la sezione di cui si dimanda l' ortografia.

La prima di queste ultime equazioni insegna che l' ortografia di questa sezione o sia dell' ombra portata dalla prima è una retta che sega l' orizzontale *am* ad una distanza dal punto *m* eguale a $\frac{1}{2} p$, e la verticale *mr* ad una distanza dal medesimo punto *m*, la quale eguaglia $p$; e però avendo sopra segata *mn* eguale alla *hl*, ed *mo* alla $\frac{1}{2}$ *hl*, e la *hl* eguagliando evidentemente il parametro della suddetta sezione, sarà *onp* l' ortografia medesima; quindi *opq* esprimerà l' ortografia dimandata.

Osservazione. In vece di estendere questa proposizione a qualunque direzione che abbiano i raggi di luce, e di esporre delle simili proprietà per altre analoghe superficie cilindriche individuate, dichiarerò la seguente, la quale richiede bensì l' effettiva delineazione dell' icnografia della superficie medesima, ma vale per qualsivoglia porzione di una superficie cilindrica che abbia le rette generatrici verticali.

## PROPOSIZIONE VI.

*Data una superficie cilindrica che ha le rette generatrici verticali, e l' ortografia e l' icnografia di una sua porzione qualunque, determinare l' ortografia dell' ombra portata da questo contorno sopra di essa superficie.*

Sia *MxbfcL* (fig. 44) l' ortografia, ed *yekg* l' icnografia del contorno della superficie cilindrica.

Si conduca la *mn* paralella alla *I*, le due *mi*, *no* alla *Mb*, e la *io* paralella alla *O*, e si avrà in *o* un punto dell' ortografia dimandata.

Imperciocchè, essendo la retta *io* paralella alla *O*, in essa cadrà l' ortografia dell' incontro tra la superficie cilindrica data e la retta *io* — *mn*, o sia dell' ombra cagionata sulla superficie medesima dal punto *i* — *m*. Ma questa retta paralella ai raggi di luce trovasi anche nel piano verticale passante per l' *mn*; adunque il detto punto d' incontro sarà anco nella retta avente per ortografia l' *ro*. Quindi l' ortografia della medesima cadrà necessariamente nel punto *o*, il solo comune alle rette medesime; ciò che ecc.

Come si è determinata l' ortografia del punto della superficie data, nel quale cade l' ombra portata dall' *i* — *m*, si determineranno tutti gli altri punti della medesima ortografia dimandata: nella figura sono disegnate anche le linee per determinare le ortografie dei punti della superficie nei quali cadono le ombre portate dagli *e* — *x*, *e* — *b*.

Osservazione 1. Se per *h* punto di contatto fra la curva *ymg* e la sua tangente paralella alla *I* si condurrà la retta *hf* paralella alla *Mb*, determinerassi il termine *f* dell' ortografia *fo*.

Osservazione 2. Siccome la regola qui esposta per determinare il punto *o* e la dimostrazione di essa non richieggono per la loro sussistenza che il punto *i* — *m* sia nella superficie cilindrica; così esse varranno, qualunque sia per essere la linea cagionante l' ombra su tale superficie, purchè si sostituisca quest' ultima linea alla *hm* - - *fi* - -, che rappresenta quella parte del contorno della stessa superficie cilindrica, la quale cagiona l' ombra avente *fo* - - per ortografia, e sopra determinata.

### Osservazione settima.

Sebbene non sia difficile l' estendere le cose dichiarate qui sopra alle superficie cilindriche che hanno le generatrici orizzontali e paralelle al piano ortografico, nulladimeno, siccome l' uso di queste è grandissimo, giacchè tali sono tutte le superficie delle volte a botte; così dichiarerò relativamente ad esse le proposizioni più interessanti; darò principio colla seguente, utilissima ai disegnatori, stante l' uso continuo che potranno fare di essa.

---

## PROPOSIZIONE VII.

*L'ortografia dello spaccato ordinario di una volta a botte circolare è il rettangolo* arsc (*fig.* 45), *qual sarà l'ortografia dell'ombra portata su di essa dalla periferia della sua sezione circolare, avente per ortografia la retta verticale* ac *eguale al raggio della medesima sezione, nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.*

Seghisi *cd* eguale alla *ca*, facciasi l'angolo *dct* semiretto, si tiri la verticale *dt*, e si descriva, *lemma quattordicesimo*, la porzione intercetta fra le rette *ca, cd* della periferia ellittica avente per due semidiametri conjugati *cd*, *ct*, e sarà questa l'ortografia dimandata; e però *arsdhm* sarà tutto lo spazio che si dovrà ombreggiare.

Per determinare i punti di quest'arco ellittico col lemma citato, e nel modo più semplice, descrivasi l'arco circolare *bfe*, facendo centro in *c*, e col raggio *ct*; e dai termini della *gf* perpendicolare alla *gt* si tirino l'orizzontale *gh* e la verticale *fh*, che in *h* loro incontro avrassi un punto qualunque dell'arco ellittico richiesto, come nel corollario terzo della terza proposizione.

Corollario. Presa *cl* = *ca*, e condotta l'orizzontale *lm*, si otterrà in *m*, segamento di essa colla verticale *ca*, il termine superiore dell'arco ellittico suddetto.

Osservazione 1. Se la direzione dei raggi luminosi sarà qualunque, si descriverà la periferia *ehtf* (fig. 46) circolare, che abbia il centro nella *ac* o nel suo prolungamento, ed il raggio eguale alla *ab*, si tirerà il raggio verticale *kf*, si farà l'angolo *gfk* eguale al Γ, condurrassi dal termine *e* la retta *eh* paralella alla *fg*; indi dai segamenti *h*, *g* le due *hi*, *gl* orizzontali, e si prolungheranno sino ad incontrare le *ai*, *bl* tirate dai punti *a, b* paralellamente alla *O*, e si avranno due semidiametri conjugati *ai*, *al* della periferia ellittica, di cui è parte la porzione *nl* curvilinea dell'ortografia dell'ombra che accade sulla superficie cilindrica.

Pertanto, descritta la porzione di quest'ellisse, *lemma quattordicesimo*, intercetta fra il punto *l* e la verticale *ab*, e prolungata l'orizzontale *gl* in *p*, avrassi nella linea *nlpdb* l'intera ortografia del contorno dell'ombra in quistione. Così, conducendo il raggio *km* perpendicolare alla *fg*, e dal suo termine *m* l'orizzontale *mn*, si determinerà col segamento *n* di questa e della verticale *ab* il termine superiore dell'arco ellittico *nl* suddetto.

Osservazione 2. Non espongo le dimostrazioni di queste regole, perchè sarebbero ripetizioni di quelle della proposizione terza; ed in vece passo a determinare gli assi dell'ellisse di cui è porzione la parte curvilinea dell'ortografia in quistione, quando i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, onde conoscere meglio questa linea, la quale s'incontra, come ho detto, sì spesso nei disegni anche comuni.

## PROPOSIZIONE VIII.

*Presa* ar (*fig.* 47) *eguale al doppio della* ac, *condotta* cn *che divida per mezzo l'angolo* acr, *e segatane la parte* ck *eguale alla* an, *sarà questa il semiasse minore dell'ortografia determinata nella precedente proposizione; e presa* ce *eguale alla* ca, *e condotta* cx *perpendicolare alla* cn, *e l'orizzontale* ex, *nella* cx *si avrà il semiasse maggiore della medesima ortografia.*

Riferito l' arco del quadrante circolare avente $ac$ per ortografia ai due suoi raggi che passano pei termini di esso, e denominato $r$ il raggio, $z_,$ l' ordinata verticale di un suo punto qualunque, ed $y_,$ l' ascissa orizzontale corrispondente, si avrà evidentemente

$$y_,^2+z_,^2=r^2$$

per equazione del medesimo quadrante.

Similmente, chiamate $x, y, z$ le tre coordinate ortogonali di un punto qualunque della retta paralella ai raggi di luce, riferita alle rette di cui sono parti i raggi suddetti, ed alla perpendicolare a queste, e diretta a destra, le equazioni

$$y=x+y_,, z=-x+z_,$$

rappresenteranno la retta paralella ai raggi di luce e passante per quel punto della detta periferia al quale corrispondono le coordinate $y_,, z_,$.

Ponendo nell' equazione $y_,^2+z_,^2=r_,^2$ che rappresenta questa periferia, in vece delle $y_,, z_,$ i loro valori desunti dalle due della paralella ai raggi di luce, si ottiene

$$2x^2+2xz+y^2+z^2-2xy=r^2,$$

la quale rappresenterà la superficie involvente.

Per essere la superficie involvente espressa da quest' ultima equazione, e la data evidentemente dalla $y^2+z^2=r^2$, $y$ e $z$ esprimendo le sue coordinate rettangole, le linee comuni a queste due superficie saranno espresse dalla simultanea sussistenza delle medesime due equazioni, intendendo che siano ora rappresentate dalle $x, y, z$ le coordinate rettangole di un punto qualunque di queste linee. Ma sottraendo dai membri della prima di queste equazioni i cognomini della seconda, si ha

$$2x(z-y+x)=0, \text{ ovvero } x=0, \text{ oppure } z+x-y=0;$$

adunque le intersecazioni delle due superficie avranno di comune l'equazione $y^2+z^2=r^2$, ed una di esse avrà per seconda equazione $x=0$, e l' altra in vece $z+x-y=0$.

Ora egli è evidente che la linea comune alle due superficie, la quale ha per seconda equazione $z+x-y=0$, è la stessa periferia circolare avente l' ortografia nella retta $ac$; quindi dalla sussistenza contemporanea delle altre due equazioni

$$y^2+z^2=r^2, \quad z+x-y=0$$

verrà rappresentata quella linea che ha per ortografia l' ellisse in quistione, cioè la seconda sezione delle due superficie cilindriche.

Eliminando la $y$ dalle ultime due equazioni, si ottiene la seguente

$$x^2+2xz+2z^2=r^2,$$

la quale, essendo fra le sole coordinate $x, z$, rappresenterà la stessa ortografia sopra descritta.

Chiamato $\varphi$ il raggio vettore di quest' ortografia, tirato dal suo centro al punto corrispondente alle ordinate $x, z$, ed $\alpha$ l' angolo che esso fa coll' asse delle $z$, hassi

$x = \varphi$ *sen.* $\alpha$, e $z = \varphi$ *cos.* $\alpha$; valori i quali, sostituiti nell' ultima equazione, la riducono alla

$$\varphi^2 \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2\alpha + \operatorname{sen}. 2\alpha \right) = r^2.$$

Così chiamando $\beta$ l' angolo che ha per tangente il doppio del raggio, e $\xi$ quello che bisogna unire a questo per avere $2\alpha$, facilmente colle notissime formole trigonometriche si ha

$$\cos. 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} ( \cos. \xi - 2 \operatorname{sen}. \xi ), \operatorname{sen}. 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} ( \operatorname{sen}. \xi + 2 \cos. \xi );$$

valori che, sostituiti nell' equazione fra $\varphi$ ed $\alpha$, danno la seguente

$$\varphi^2 ( 3 + \sqrt{5} \cdot \cos. \xi ) = 2r^2.$$

Quest' ultima equazione insegna che il minimo raggio $\varphi$ vettore corrisponde al massimo valore di $\cos. \xi$, cioè a $\cos. \xi = 1$, ovvero a $\xi = 0$; e che è desso raggio eguale ad

$$r\sqrt{2} : \sqrt{(3 + \sqrt{5})}, \text{ oppure ad } \frac{r}{2} ( \sqrt{5} - 1 );$$

ed anche dice che il massimo è corrispondente a $\cos. \xi = -1$, o sia a $\xi$ eguale a due retti, e che è eguale per conseguenza ad

$$r\sqrt{2} : \sqrt{(3 - \sqrt{5})}, \text{ ovvero ad } \frac{r}{2} ( \sqrt{5} + 1 ).$$

Ora ponendo zero in luogo di $\xi$ nell' equazione $2\alpha = \beta + \xi$, costituita sopra, si ha $\alpha = \frac{1}{2} \beta$; adunque il minimo valore di $\varphi$, il quale è lo stesso semiasse minore $ck$, deve fare coll' asse delle $z$ l' angolo eguale alla metà di quello che ha per tangente il doppio del raggio. Ma per essere $ar$ doppia di $r$, e l' angolo $acr$ doppio dell' $acu$, si ha

$$cr = r\sqrt{5}, \text{ ed } ac + cr : ar = ac : an,$$

$$\text{ovvero } an = 2r^2 : r ( 1 + \sqrt{5} ) = 2r : ( 1 + \sqrt{5} ), \text{ e però } an = \frac{r}{2} ( \sqrt{5} - 1 );$$

cioè la retta $an$ eguale al semiasse minore anzi trovato; come pure si ha

$$\operatorname{tang}. acd = 2, \text{ o sia } acd = \beta;$$

adunque la retta $ck$, determinata sopra, rappresenta veramente il semiasse minore dimandato.

Così, essendo il triangolo $xce$ simile all' $anc$, si avrà

$$an : ac = ce : cx,$$

$$\text{ovvero } cx = r^2 : \frac{r}{2} ( \sqrt{5} - 1 ) = \frac{r}{2} ( \sqrt{5} + 1 );$$

vale a dire la retta $cx$ eguale al semiasse maggiore dell' ellisse medesima; tutto come ho asserito.

Osservazione. È singolare che l' asse minore dell' ellisse in quistione, ovvero la parte $an$ della retta $ar$ eguaglia il lato del decagono equilatero inscritto nel cerchio che ha per raggio la $ac$.

## PROPOSIZIONE IX.

*Il rettangolo* abdc (*fig.* 48) *essendo l' ortografia dello spaccato ordinario di una volta a botte ellittica avente la saetta eguale alla* ab, *e la semicorda alla* $\alpha$, *trovare l' ortografia dell' ombra portata su di essa dalla periferia ellittica della sua sezione verticale, che ha per ortografia la stessa retta verticale* ab.

Si faccia *kf* perpendicolare al prolungamento *sa* della *ca* ed eguale alla *ab*, seghisi *ks* eguale alla semicorda $\alpha$, e si costruisca l' angolo *kfg* eguale al Γ, e la *sx* paralella alla *fg*: fatto ciò, si trovino i due segamenti *g*, *x* delle rette *fg*, *sx* e della periferia ellittica avente per semiassi *kf*, *ks*, *lemma quindicesimo*, ed ai segamenti si conducano le *gl*, *xi* orizzontali, ed estendansi sino ad incontrare le due *ai*, *bl* condotte dai punti *a*, *b* paralellamente alla *O*; e nelle rette *ai*, *al*, così determinate, avransi due semidiametri conjugati della periferia ellittica, di cui è porzione *nl* ortografia dimandata. Condotta l' orizzontale *lp*, sarà *nlpdb* l' intero spazio che si dovrà ombreggiare.

Osservazione. Per trovare il termine *n* dell' arco ellittico *nl* senza descrivere l' arco medesimo, si troverà, *lemma decimo*, il punto di contatto fra l' ellisse che ha per semiassi *kf*, *ks*, e la sua tangente paralella alla *fg*, e da esso punto si condurrà la retta orizzontale, e questa incontrerà evidentemente l' *ab* nel punto dimandato.

## PROPOSIZIONE X.

*Data la traccia nel piano dei profili di una superficie cilindrica avente le rette generatrici orizzontali e paralelle al piano ortografico, e data anche l' ortografia ed il profilo di una linea qualunque, trovare l' ortografia dell' ombra portata su di essa superficie da questa linea medesima.*

Siano *bcdef* (fig. 49) l' ortografia, e *ghl* il profilo della linea che cagiona l' ombra, ed *mnp* sia la traccia della superficie cilindrica fatta al piano de' profili, linee tutte conosciute.

Conducasi l' orizzontale *lb*, si faccia l' angolo *bln* eguale al complemento del Γ; indi si tiri *bq* paralella alla *O*, e la *nq* orizzontale; ed in *q*, segamento di queste ultime due rette, otterrassi un punto della *aqr* ortografia dimandata.

S' immagini il piano paralello ai raggi di luce e che passa per la retta avente il punto *l* per profilo; questo piano segherà nuovamente la superficie cilindrica nella retta generatrice che ha l' ortografia nella orizzontale *nq*. Ma in questo piano si trova quella retta paralella ai raggi di luce che ha per ortografia *bq*; adunque l' ortografia del punto della superficie cilindrica, nel quale cade l' ombra portata dal *b* — *l* della obbiettiva data, si

troverà nelle due rette $nq$, $bq$; e conseguentemente sarà essa in $q$ segamento delle medesime; come volevasi dimostrare.

Osservazione. Se la linea $ghl$ coinciderà colla $mnp$, l' obbiettiva data sarà interamente nella superficie cilindrica; e però se la linea $bcdef$ sarà l' ortografia del lembo di una porzione di essa superficie, la linea $aqr$ determinata sopra esprimerà l' ortografia del contorno dell' ombra che accadrà sulla medesima superficie.

In questo medesimo caso, se una parte del lembo della superficie cilindrica sarà anteriore alla più elevata retta generatrice della superficie medesima, cioè a quella che ha per ortografia l' orizzontale $fc$ tangente la linea $mnp$, si procederà alla delineazione dell' ortografia del contorno dell' ombra portata da questa parte, come lo indicano le rette $eg$, $gp$, $pr$, $er$ paralelle rispettivamente alle $bl$, $ln$, $nq$, $bq$, colle quali rimane evidentemente determinato il punto $r$, ortografia dell' ombra che porta quello del lembo, il quale ha la sua ortografia in $e$, cioè $g-e$.

Così, trovato il punto di contatto $m$ fra il profilo $mnp$ e la sua tangente paralella alla $ln$, e condotta da questa la $am$ orizzontale, ed estesa sino ad incontrare l' ortografia $abcdef$ del lembo stesso, si avrà $a$ termine superiore dell' ortografia in quistione.

## PROPOSIZIONE XI.

*Data la direttrice di una superficie cilindrica comunque posta nello spazio, non che una retta paralella alle sue generatrici ed un' altra linea qualsivoglia, trovare l' ortografia e l' icnografia dell' ombra portata su di essa superficie da quest' ultima linea.*

Sia $ABC-abc$ (fig. 50) la data direttrice della superficie cilindrica, e $DEF-def$ la linea che cagiona l' ombra, cioè siano $ABC$, $DEF$ le icnografie, ed $abc$, $def$ le ortografie di queste linee.

Si tiri $BE$ paralella ad una retta determinata come la $NL$ della figura terza, e conducansi le $Ee$, $Bb$ perpendicolari all' asse $ML$: fatto questo, tirinsi le $eg$, $EG$ rispettivamente paralelle alle $O$, $I$, e le $bg$, $BG$ all' ortografia ed icnografia della data paralella alle rette generatrici della superficie cilindrica, e sarà $g$ un punto dell' ortografia, e $G$ uno dell' icnografia dimandate

Per essere la $BE$ paralella alla retta determinata nello stesso modo della detta $NL$, il piano che passa per $BE$ paralellamente ai raggi di luce sega la superficie data e la involvente lungo le rette generatrici $BG-bg$, $EG-eg$, le quali si tagliano in $G-g$; e però questo segamento sarà un punto della sezione della superficie cilindrica data e della involvente; quindi i punti $g$, $G$ apparterranno, il primo all' ortografia, ed il secondo all' icnografia dimandate; ciò che ecc.

Corollario 1. Per avere l' ortografia e l' icnografia dell' ombra portata su di una data porzione di qualsivoglia superficie cilindrica dai contorni di essa, si sostituirà all' obbiettiva $DEF-def$ il contorno medesimo; ed i punti $g$, $G$ apparterranno all' ortografia ed icnografia dimandate.

Corollario 2. Ammesse verticali le rette generatrici della superficie cilindrica, e che la linea che cagiona l' ombra sia piana e in un piano paralello all' ordinaria direzione

dei ràggi di luce ed all' asse *LM*: rappresentata colla *PQ — pq* ( fig. 51 ) la retta comune a questo piano e ad un altro paralello all' ortografico ed anteriore alla superficie cilindrica, le ombre portate su questa superficie dalla suddetta *DEF — def*, e da questa *PQ — pq* coincideranno; e però espressa colla *ABC* la traccia icnografica della medesima superficie cilindrica, è fatta *Nn* perpendicolare all' asse *ML*, gli angoli *TNB*, *bns* semiretti, la *Bb* paralella alla *Nn*, il segamento *b* sarà un punto dell' ortografia 1*b*2 dimandata, proposizione quinta. Ma estesa la *Bb* in *T* ed *s*, hansi i due triangoli *nbs*, *NBT* rettangoli isosceli perfettamente eguali, i quali danno *bs* eguale alla *BT*. Adunque la linea 1*b*2 ortografia in quistione sarà eguale perfettamente alla *ABC* traccia icnografica della superficie cilindrica, e conseguentemente con facilità descrivibile.

Se la superficie cilindrica sarà la metà di quella di un cilindro ordinario avente l'asse verticale, ed *ABLM* per ortografia ( tav. 7, fig. 52 ), e che l' ombra sia cagionata dalla *AB* diametro della sua base orizzontale e paralello al piano ortografico, la richiesta ortografia risulterà la semiperiferia circolare *AFB* descritta sul diametro *AB* stesso.

Osservazione. Non mi fermo a considerare i casi nei quali la linea direttrice della superficie cilindrica, o quella che cagiona l' ombra, od amendue siano in piani perpendicolari all' asse *ML*, perchè riescono facilissimi dopo l' esposizione della regola generale ampiamente dichiarata.

## DE' CONTORNI

### DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE CONICHE.

Anche per queste superficie avrei potuto incominciare dall' esporre e dimostrare l' ultima proposizione che io dichiaro relativamente ad esse, cioè dalla più generale, e poscia cavarne le altre come altrettanti corollarj, le quali sono evidentemente casi particolari di essa; ma per gli stessi motivi addotti rispetto all' ordine tenuto per le superficie cilindriche, seguirò l' altr' ordine, non solo per le superficie coniche, ma anche per tutte le altre superficie di cui parlerò nel seguito.

## PROPOSIZIONE XII.

*Data l' ortografia e l' icnografia del vertice di una superficie conica, non che la traccia icnografica di essa e l' ortografia di una sua retta generatrice, determinare l' ortografia e l' icnografia dell' ombra che porta questa retta sulla superficie medesima.*

Sia *b* ( tav. 6, fig. 53 ) l' ortografia, e *B* l' icnografia del vertice, ed *AIC* la traccia data della superficie conica, ed *ab* esprima l' ortografia della sua retta generatrice che porta l' ombra di cui si dimandano le projezioni.

Condotte *BH*, *bh* rispettivamente paralelle alle *I*, *O*, le *hH*, *aA* perpendicolari alla *ML* asse, si congiunga *HA*, e dal segamento *I* si tiri *Ii* perpendicolare anch' essa alla *ML*, e congiungansi le rette *BI*, *bi*; e saranno queste, la prima l' icnografia, e la seconda l' ortografia dimandate.

Essendo $H$ l' incontro del piano icnografico colla paralella ai raggi di luce che passa pel vertice della superficie conica, nel piano della $AH$ e della generatrice che porta l' ombra si troveranno tutte le rette paralelle ai raggi di luce e che passano per questa medesima generatrice; e però in esso piano troverassi anche l' ombra stessa. Quindi quest' ombra cadrà nella retta generatrice della superficie conica, la quale passa pel segamento $I$; e conseguentemente le rette $BI$, $bi$, sopra determinate, saranno l' icnografia e l' ortografia dimandate.

## PROPOSIZIONE XIII.

*Conoscendosi l' ortografia e l' icnografia di un cono retto ordinario che ha l' asse verticale ed il vertice sotto la base, trovare l' ortografia e l' icnografia dell' ombra portata sulla superficie del medesimo dalla periferia della sua base.*

Il triangolo $abc$ (tav. 7, fig. 54) ed il cerchio $QBG$ avente il centro in $C$ siano l' ortografia e l' icnografia del cono o della superficie, e la retta $AB-ab$ sia l' asse comune ai piani ortografico ed icnografico.

Si tirino $cd$, $CD$, $Dd$ rispettivamente paralelle alle $O$, $I$, $Cc$, e pei termini del diametro $AB$, e pel punto $E$ di mezzo della semiperiferia $AGB$ si conducano le $DAF$, $DCB$, $DEH$, e congiungansi le $CF$, $CG$, $CH$; indi si tirino le $AI$, $BM$, $EL$ paralelle alla $I$, uniscasi $MI$ ed il segamento $N$ al punto $L$, e si avranno nelle rette $LN$, $MN$ due semidiametri conjugati della periferia ellittica $QLM$ icnografia dimandata. Così, condotte $Gg$, $Ff$, $Hh$ perpendicolari alla $ab$, tirate $bm$, $ai$ e l' $el$ pel punto $e$ di mezzo della stessa $ab$ tutte paralelle alla $O$, e congiunte le $cfi$, $chl$, $cgm$, unita $im$ ed estesa $el$ sino ad incontrarla, otterransi nelle rette $nl$, $ni$ due semidiametri conjugati della periferia ellittica $qlm$, che esprime l' ortografia richiesta: quindi entrambe queste linee descrivibili facilmente colla regola esposta nel *lemma quattordicesimo*.

La superficie involvente e la conica sono ambe di second' ordine, e la circonferenza $QBG-ab$ è una delle linee comuni ad esse; adunque l' estremo dell' ombra cagionata dalla circonferenza della base del cono sulla superficie di esso essendo l' altra linea comune a queste due superficie, sarà anch' essa piana, pel *lemma tredicesimo*, ed in conseguenza una periferia ellittica: quindi tanto la sua icnografia, quanto l' ortografia, le quali sono evidentemente le due linee dimandate, saranno esse pure in generale periferie ellittiche.

Le sezioni ellittiche di una superficie cilindrica ordinaria hanno i centri nell' asse della medesima, le projezioni delle ellissi hanno i loro centri nelle projezioni dei centri delle stesse ellissi; adunque le projezioni delle sezioni ellittiche di una superficie cilindrica ordinaria avranno i centri nelle projezioni dell' asse della medesima superficie. Pertanto l' icnografia e l' ortografia delle quali si parla, per essere projezioni di una sezione ellittica della superficie involvente, avranno i centri, la prima nella retta $CD$ icnografia dell' asse di questa superficie, e l' altra nella $nl$ ortografia del medesimo.

La retta $AI-ai$ generatrice della superficie involvente, e la $CF-cf$ generatrice della conica essendo ambedue nel piano delle $DF-df$, $DC-dc$, esse s' incontreranno, ed il loro segamento avrà per ortografia $i$, e per icnografia $I$. Questo segamento, per essere

nella superficie conica e nella retta $AI - ai$ che passa pel punto $A - a$ ed è paralella ai raggi di luce, si troverà nella periferia ellittica dell' ombra in quistione; e conseguentemente la sua icnografia sarà nella linea $QLM$, e l' ortografia nella $qlm$, cioè nelle periferie ellittiche rappresentanti l' ortografia e l'icnografia dimandate.

Nel modo stesso che ho qui determinato i punti $I$, $i$ ortografia ed icnografia dell'incontro della superficie conica e della retta passante pel punto $A - a$ paralellamente ai raggi di luce, si determineranno gli analoghi punti per un altro qualunque della periferia della base del cono. Così i punti $M$, $L$, $m$, $l$, i quali sono visibilmente pei due $E - e$, $B - b$, ciò che $I$, $i$ sono pel punto $A - a$, rappresenteranno l' icnografia e l' ortografia dei due punti della superficie conica, nei quali sarà essa incontrata dalle rette che passano pei punti stessi $E - e$, $B - b$ paralellamente ai raggi di luce.

Il piano delle paralelle $AI - ai$, $BM - bm$, passando per l' asse $CD - cd$ della superficie involvente, segherà il piano della periferia dell' ombra lungo un suo diametro, il quale dovendo avere i termini nella superficie conica e nelle medesime rette $AI - ai$, $BM - bm$, avrà per ortografia la $im$, e per icnografia $IM$; quindi queste due rette, come projezioni di due diametri della periferia ellittica suddetta, risulteranno esse pure diametri delle ellissi $qlm$, $QLM$, ed i loro segamenti $N$, $n$ colle $CD$, $cd$ saranno i centri di queste medesime due ellissi.

Similmente, per essere il piano tangente alla superficie involvente lungo la generatrice $EL - el$ paralello a quello delle due rette $AI - ai$, $BM - bm$, la retta comune ad esso piano ed a quello della periferia dell' ombra portata non solo sarà tangente a questa periferia ed evidentemente nel punto $L - l$, ma sarà esso anche paralello al suo diametro $MI - mi$ suddetto; e però la sua ortografia e l' icnografia, le quali debbono essere tangenti le due ellissi $qlm$, $QLM$ nei punti $l$, $L$, risulteranno paralelle ai diametri medesimi $IM$, $im$ di queste ellissi.

Essendo i due diametri $IM$, $im$ delle ellissi $QLM$, $qlm$ paralelli rispettivamente alle tangenti che hanno i punti di contatto in $L$, $l$, le due rette $MN$, $NL$ saranno semidiametri conjugati dell' icnografia $QLM$, e le altre due $mn$, $nl$ dell' ortografia $qlm$; come si è detto.

Osservazione 1. Tutto quello che ho dimostrato pei due diametri $AB$, $EE'$, si estende a due altri diametri qualunque della periferia $QBG$, purchè siano anch' essi fra loro perpendicolari; cosicchè determinato il punto $D - d$ come sopra, e fatto per due qualunque di questi diametri ciò che si è fatto pei due anzidetti, se ne otterranno due sì per l' ortografia $QLM$ che per l' icnografia $qlm$, i quali saranno essi pure fra loro conjugati.

Osservazione 2. Se il cono non sarà retto, le linee $CF$, $CM$, $CH$ dovranno partire non dal punto $C$ centro della periferia $QBE$, ma bensì dall' icnografia del vertice del cono stesso, cioè dal piede della perpendicolare tirata al piano $QBE$ dal vertice medesimo.

Osservazione 3. Se la superficie conica fosse la sola metà posteriore al piano ortografico, cioè quella avente per icnografia il semicerchio $AFB$, i quadrilateri $ACIQ$, $aciq$ rappresenterebbero l' uno l' icnografia, e l' altro l' ortografia dell' ombra cadente sulla superficie, siccome è facile a comprendersi, combinando questa proposizione coll' antecedente. Così se la porzione della superficie conica fosse quella avente $CXFB$ per icnografia, l' icnografia e l' ortografia dell' ombra portata sulla superficie stessa da' suoi lembi sarebbero i contorni dei due quadrilateri mistilinei $XCZQ$, $xczq$ determinati in modo chiaro per la sola ispezione della figura.

Osservazione 4. Ammesso che i raggi di luce abbiano la direzione che fissano generalmente i disegnatori, gli angoli $IAC$, $MBC$, $CEL$ risulteranno semiretti; e però i punti $M$, $L$ nella retta che passa pei punti $B$, $E$, ed il punto $I$ nella $AE'$ che passa pel punto $E'$ di mezzo della semiperiferia $AFB$.

In questo medesimo caso si potranno trovare i due diametri conjugati *ni*, *nl* dell' ortografia anco nel seguente modo, il quale con vantaggio si preferirà al generale superiormente esposto, qualora non si debba descrivere anche l' icnografia.

L' ortografia del cono sia il triangolo *EHC* (fig. 55).

Si prenda *AB* eguale all' altezza del cono, e conducasi *AD* perpendicolare alla *AH* ed eguale anch' essa all' altezza del cono, si descriva la periferia circolare *EFM* col centro *B*, uniscansi le *DEF*, *DLM*, e dai segamenti *F*, *M* tirinsi le *FQ*, *MN* perpendicolari alla *EH*, e le *ER*, *TBV* facenti gli angoli *HBV*, *BER* semiretti; indi congiungansi le *CRQ*, *CVN* e la *RF*--, ed otterransi nelle rette *RT*, *TV* due semidiametri conjugati dell' ortografia dimandata.

Se in questa costruzione si fosse unita *DGH*, tirata *GP* perpendicolare alla *EH*, condotta *HS* paralella alla *TV*, e congiunta *RS*, in vece di congiungere *RF*, sarebbe essa un evidentissimo corollario della proposizione anzi esposta: bisogna adunque dimostrare che la retta *RS* deve passare, in questo caso, pel segamento *F* della periferia *EXM* e della retta *DEF*.

Si ponga per brevità *AB* o sia l' altezza del cono eguale ad $a$, $BE=r$, $BQ=\alpha$, $BP=\beta$, e si avrà

$$AE=a-r,\ AH=a+r,\ DE=\sqrt{(2a^2-2ar+r^2)},\ DH=\sqrt{(2a^2+2ar+r^2)},$$

$$\cos. AED=(a-r):\sqrt{(2a^2-2ar+r^2)},\ \cos. AHD=(a+r):\sqrt{(2a^2+2ar+r^2)},$$

$$EQ=EF\cos. AED=2r\cos.^2 AED=2r(a-r)^2:(2a^2-2ar+r^2),$$

$$PH=2r\cos.^2 AHD=2r(a+r)^2:(2a^2+2ar+r^2),$$

$$EQ=r-\alpha,\ QF=EQ\ tang.\ FEQ=\frac{r-\alpha}{a-r}a;$$ e però sarà

$$\beta=PH-r=r^2(2a+r):2a^2+2ar+r^2),$$

$$\text{ed } \alpha=r^2(2a^2-r):(2a^2-2ar+r^2).$$

Così, condotte le *Ra*, *Sb* perpendicolari alla *EH*, ovvero paralelle alla *BC* altezza del cono, si avranno le proporzioni geometriche

$$a-aB:r-aB=\alpha:a,\ bB-\beta:bB+r=\beta:a,$$

le quali danno $aB=(a-r)\alpha:(a-\alpha)$, e $bB=(a+r)\beta:(a-\beta)$; e però sarà

$$aR=Ea=r-aB=\frac{r-\alpha}{a-\alpha}a,$$

$$bS=bH=r+bB=\frac{r+\beta}{a-\beta}a,$$

$$\text{ed } Eb=2r-bH=\frac{ar-2r\beta-a\beta}{a-\beta}.$$

Ora, affinchè il punto *F* sia nella retta *RS*, basta che abbia luogo la proporzione

$$bS+aR:ba=FQ+aR:Qa,$$

o sia la seguente

$$\frac{r+\beta}{a-\beta}a+\frac{r-\alpha}{a-\alpha}a:\frac{r-\alpha}{a-\alpha}a-\frac{ar-2r\beta-a\beta}{a-\beta}=\frac{r-\alpha}{a-r}a+\frac{r-\alpha}{a-\alpha}a:\frac{r-\alpha}{a-r}a-(r-\alpha),$$

oppure l' equazione

$$a^2(ar-2a^2+r^2)+\alpha\beta(2a^2+3ar-r^2)+\alpha^2(2a^2-r^2+ar)\,a-\beta(2a^2+ar-r^2)a-2ra^2\beta=0,$$

la quale si ottiene eguagliando il prodotto dei termini estremi di quest' ultima proporzione a quello de' suoi termini medj.

Ma sostituendo in questa equazione, in luogo di $\alpha$ e $\beta$, i loro valori trovati, e dividendo la risultante per $r^7$, e ponendo per brevità $\frac{a}{r}=n$, si ottiene

$$n(4n^4+1)(2n^2-n-1)(2n-1)-n(2n^2+n-1)(2n+1)(4n^4-8n^3+8n^2-4n+1)-$$
$$2(4n^2-1)(2n-1)+(2n^2+3n-1)(4n^2-1)(2n^2-2n+1)-$$
$$(4n^2-4n+1)(2n^2-n-1)(2n^2+2n+1)=0,$$

che facilmente si verifica essere identica; adunque ecc.

Osservazione 5. Se la base del cono sarà ellittica, facendo per due diametri conjugati della sua icnografia ciò che si è fatto qui sopra per due diametri della periferia *QBE* (fig. 54) fra loro perpendicolari, si dedurranno delle conseguenze analoghe.

Corollario. Conducendo dal punto *D* le tangenti *DQ*, *DP* alla periferia *QBE*, e dai punti *Q*, *P* di contatto le *Qq*, *Pp* perpendicolari alla *ab*, avransi nei medesimi contatti *P*, *Q* i segamenti dell' icnografia *QLM* colla periferia *QBE*, e nei due altri *q*, *f* quelli dell' ortografia *qlm* colla retta orizzontale *ab*.

Osservazione 6. Sebbene si potrebbero avere gli assi dell' icnografia *QLM*, combinando le regole esposte per trovare due suoi diametri conjugati coll' altra notissima a tutti per ottenere gli assi di un' ellisse, quando siano conosciuti due diametri conjugati di essa; nulladimeno, per avere gli assi di questa icnografia, io espongo la regola seguente, perchè è assai più semplice di quella che risulta dalla detta combinazione.

Sulla $\alpha\beta$ (fig. 56) paralella alla *I* e diametro dell' icnografia del cono retto facciasi il triangolo $\alpha\delta\beta$ eguale all' *abc* (fig. 54), gli angoli $\xi\alpha\beta$, $\alpha\beta\mu$ eguali al $\Sigma$; trovisi il punto $\lambda$ di mezzo della $\xi\mu$, tirinsi le $\xi y$, $\delta Cm$, $\lambda Nx$ perpendicolari alla $\alpha\beta$, ed $\lambda mn$ paralella; e si descriva l' archetto circolare *x* col centro *C* e col raggio *Cx* eguale ad *mn*, e saranno *Nx*, *Ny* due semiassi dell' icnografia in quistione.

## PROPOSIZIONE XIV.

*Data l' ortografia e l' icnografia del vertice e degli estremi di qualunque porzione di qualsivoglia superficie conica, determinare quelle dell' ombra che portano essi estremi sulla superficie medesima.*

Siano *V*, *BAC* (fig. 57) le ortografie, e *v*, *bac* le icnografie date.

Si trovino le tracce *b'a'c'*, *B'A'C'* icnografiche della superficie conica e della involvente, *lemma secondo*, e si tirino le *ve*, *VE* paralelle rispettivamente alle *O*, *I*, e la *Ee* perpendicolare alla *ML* asse: fatto questo, pel punto *E* conducasi la *FG* segante le tracce anzidette, e dai segamenti *G*, *F*

si tirino le $Gg$, $Ff$ perpendicolari alla $ML$, e congiungansi le $gvn$, $GVN$, indi si traccino le $fn$, $FN$ paralelle anch' esse alle $O$, $I$, ed otterransi i due punti $n$, $N$, appartenenti, il primo all' ortografia, e l' altro all' icnografia dimandate.

La generatrice $GN-gn$ della superficie conica, e la $FN-fn$ dell' involvente essendo entrambe nel piano delle $FG$, $VE-ve$, segheransi, e nel punto $N-n$. Ma il segamento di queste generatrici è lo stesso punto della superficie conica, nel quale cade l' ombra portata da quello del lembo di essa avente $a$ per ortografia; adunque ecc. Quindi facendo per tutte le rette che passano pel punto $E$ ciò che si è fatto per la $FG$, determineransi tutti i punti dell' ortografia ed icnografia dimandate.

Osservazione 1. Se la superficie conica fosse circolare od ellittica, e disposta anche comunque nello spazio, ed il contorno di essa una periferia di cerchio o di ellisse, le ortografie ed icnografie dei punti della superficie medesima, nei quali cadrebbero le ombre portate dai termini dei diametri conjugati dagli estremi di essa, sarebbero termini di diametri conjugati dell' ortografia ed icnografia dell' ombra cadente sulla superficie medesima, e però descrivibili queste ortografie ed icnografie anche colla regola esposta nello stesso *lemma quattordicesimo.*

Osservazione 2. Onde delineare l' ortografia e l' icnografia dell' ombra portata su qualsivoglia superficie conica da una linea qualunque, comunque posta nello spazio; trovate che si avranno le tracce icnografiche o le ortografiche, se occorrerà, della superficie involvente e della conica, si procederà colla regola anzi dichiarata, sostituendo alla linea $BAC-bac$ la data direttrice della superficie conica medesima.

Osservazione 3. Anche per questa proposizione non mi fermo a considerare i casi che la direttrice o la linea cagionante l' ombra od ambedue siano in un piano perpendicolare all' asse $ML$ per le stesse ragioni recate per le superficie cilindriche.

## DE' CONTORNI

### DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE SFERICHE.

### PROPOSIZIONE XV.

*Data l' ortografia dello spaccato ordinario di una sfera, trovare quella dell' ombra che porta il suo lembo su di essa, nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.*

Supposta l' ortografia dello spaccato ed in un lo spaccato stesso della sfera rappresentato dal cerchio $ALDS$ (fig. 58) avente il centro in $C$, e che $AD$ sia il suo diametro orizzontale, si determinerà l' ortografia dell' ombra che vien portata nella cavità della superficie sferica dal suo lembo, nel modo seguente:

Si farà l' angolo $BCD$ semiretto, condurransi le corde $GF$, $KL$, -- perpendicolari al raggio $BC$, o che facciano angoli semiretti col diametro $AD$, si segheranno le loro terze parti $Ga$, $Kb$, --, ed i punti $B$, $a$, $b$, -- apparterranno all' ortografia in quistione.

S' immagini un piano perpendicolare allo spaccato e lungo una delle sue corde $GF$, $KL$, - -, per esempio, lungo la $GF$; e questo segherà la superficie della sfera nella semiperiferia di un mezzo cerchio avente per diametro la stessa retta $GF$.

Nel piano di questo semicerchio suppongasi tirata la retta, secondo la quale cade l' ombra del punto $F$, e prolungata sino ad incontrare la semiperiferia di esso; e da questo punto d' incontro, il quale si trova nella superficie sferica, sia condotta la retta perpendicolare alla $FG$, e sarà essa anche perpendicolare al piano $ALD$; e però il suo piede indicherà nello spaccato l' ortografia del punto della sfera nel quale cade l'ombra portata dallo stesso punto $F$.

Ora il medesimo semicerchio, rotando attorno al suo diametro $GF$ unitamente alle linee disegnate in esso, si adatti colle medesime al piano $ALD$, ed in questa situazione la sua semiperiferia cada nella $GHF$, e la retta che indica la direzione del raggio di luce che passa pel punto $F$, nella $FH$; e con ciò la perpendicolare condotta superiormente alla $FG$ cadrà nella retta $Ha$ tirata dal punto $H$ della semiperiferia $GHF$ perpendicolarmente al suo diametro $FG$; e conseguentemente il punto $a$ piede di quest' ultima perpendicolare indicherà nello spaccato $ALD$ l' ortografia anzidetta, e però un punto dell' ortografia del contorno di cui si parla.

Rappresentando la retta $FH$ la diagonale di un cubo, la $Ha$ rappresenterà un suo lato, come lo mostra l' ispezione della figura seconda; e però sarà

$\overline{FH}^2 = 3 \cdot \overline{Ha}^2$. Ma $\overline{FH}^2 = Fa \cdot FG$, ed $\overline{Ha}^2 = Fa \cdot Ga$; adunque $Fa \cdot GF = 3Fa \cdot aG$.

Dividendo per $Fa$ ciascuna di queste ultime due quantità eguali, si ha

$$FG = 3 \cdot aG, \text{ ovvero } Ga = \frac{1}{3} \cdot FG;$$

vale a dire il punto $a$ appartenente all' ortografia dell' ombra si trova distante dal $G$ di un terzo della corda corrispondente $FG$; ma ciò che ho detto pel punto $a$ vale anche per gli analoghi $b$, - -; adunque tutti i punti $a$, $b$, - - dell' ortografia dell' ombra portata dal lembo $ALD$ nello spaccato della sfera sono distanti dai termini $G$, $K$, - - delle corde $FG$, $KL$, - - rispettivamente di un terzo di esse; ciò che voleva dimostrare.

Corollario 1. Pel punto $E$, dove la linea $Bab$ - - sega il diametro $AD$, condotta la retta $REQ$ perpendicolare alla $BC$, e tirato il raggio $CQ$, si avrà

$$CR = RE, \; RQ = 3RE = 3CR,$$

$$\text{e } \overline{CQ}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{QR}^2, \text{ e perciò}$$

$$\overline{CQ}^2 = \overline{CR}^2 + (3 \cdot CR)^2 = 10 \cdot \overline{CR}^2 = 5 \cdot 2 \cdot \overline{CR}^2.$$

Ma il triangolo rettangolo ed isoscele $CRE$ dà $2 \cdot \overline{CR}^2 = \overline{CE}^2$; adunque sarà

$$\overline{CQ}^2 = 5 \cdot \overline{CE}^2.$$

E pertanto, condotto il raggio verticale $CS$, e tirata la tangente $ST$ eguale alla metà di esso, ed uniti i punti $C$, $T$; e dal punto $V$, dove quest' ultima sega la periferia $ASD$, tirata la $VE$ perpendicolare al diametro $AD$, si otterrà il punto $E$, comune al diametro medesimo $AD$ ed alla ortografia $Bab$ - -, senza descrivere questa.

Imperciocchè, per essere $CS = 2ST$, sarà $VE = 2CE$, $\overline{VE}^2 = 4 \cdot \overline{CE}^2$; e però il quadrato della $CV$ o della $CQ$, il quale eguaglia la somma di quelli delle $VE$, $CE$, sarà quintuplo di quello della sola $CE$; appunto ecc.

Corollario 2. Essendo le rette $Ga$, $kb$, - - ciascuna la terza parte delle $FG$, $KL$, - -, la curva $BabM$ sarà un arco di ellisse avente per semiasse maggiore il raggio $BC$, e per semiasse minore $CI = \frac{1}{3} BC$, e perpendicolare a $BC$ stesso.

Osservazione I. Col centro $C$ e col raggio eguale ad un terzo di $AC$ si descriva l'arco di cerchio $lk$, si segnino in esso i punti $f, g, k, l$, -- in direzione rettilinea col punto $C$ e rispettivamente cogli $F, G, K, L$, --, e nelle distanze $fg$, $kl$, -- avransi immediatamente la terza parte $Ca$, $kb$, -- delle corde $FG$, $K$, $L$, --, quindi in un tratto i segamenti $a$, $b$, --.

Osservazione 2. S'immaginino calate dai punti $F$ ed $a$ le perpendicolari all'orizzontale $AD$, e nominisi la prima di esse $F$, e l'altra $a$, e $C$ la porzione della medesima orizzontale $AD$ intercetta fra il punto $C$ e la perpendicolare $F$.

Essendo l'angolo $BCD$ semiretto, e la retta $FG$ perpendicolare alla $BC$, si avrà evidentemente

$$F - a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot Fa, \ \frac{1}{\sqrt{2}} (F - C) = \frac{1}{2} FG; \text{ e però}$$

$$F - a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} FG, \text{ o sia } F - a = \frac{4}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} FG = \frac{2}{3} (F - C);$$

quindi

$$3F - 3a = 2F - 2C, \text{ ovvero } a = \frac{F + 2C}{3},$$

risultamento singolare.

Corollario 3. Nelle espressioni della massima ascissa e della corrispondente ordinata trovate nell'osservazione prima della terza proposizione della parte seconda si pongano, in vece delle quantità $b$, $s$, $c$, i loro valori $\frac{1}{3} r$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ relativi all'ellisse $BEM$, supposto $CD = r$, e si avrà

$$\sqrt{(r^2 s^2 + b^2 c^2)} = \sqrt{\left(\frac{r^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{9}\right)} = \frac{r}{3} \sqrt{5},$$

$$(r^2 - b^2)\, cs : \sqrt{(r^2 s^2 + b^2 c^2)} = \frac{8}{9} r^2 \cdot \frac{1}{2} : \frac{r}{3} \sqrt{5} = \frac{4r}{3} : \sqrt{5};$$

cioè $Cm$ ascissa massima eguale ad $\frac{r}{3}\sqrt{5}$, ed $mn$ ordinata corrispondente eguale a $\frac{4}{3} CE$, ovvero $Em = \frac{2}{3} \cdot CE$, ed $mn = 2 \cdot Em$.

Quindi, facendo la $Em$ eguale a due terzi della $CE$, e l'$mn$ doppia della $Em$ e perpendicolare alla $CD$, avrassi il punto $n$, a cui corrisponde la massima ascissa dell'ortografia in quistione.

## PROPOSIZIONE XVI.

*Data l'ortografia dello spaccato ordinario di una sfera, trovare quella dell'ombra che portano i suoi estremi sopra di essa, qualunque sia la direzione dei raggi di luce.*

L'ortografia della sfera e ad un tempo il suo spaccato ordinario sia il cerchio $BCDL$ (fig. 59) che ha il centro in $O$.

Si tiri il diametro $BE$ paralello, ed il $CF$ perpendicolare all'ortografia $O$, facciasi l'angolo $GBE$ eguale al $\Delta$, e si tiri $GH$ perpendicolare al diametro $BE$, ed avransi nelle rette $CO$, $OH$ due semiassi della periferia ellittica che rappresenta l'ortografia dimandata, e però descrivibile colle regole notissime.

Suppongasi che il semicerchio $BFE$ insieme alle rette $BG$, $GH$, rotando indietro attorno al suo diametro $BE$, si disponga perpendicolarmente a quello dello spaccato; in questa situazione la retta $BG$ cadrà nel raggio di luce che passa pel punto $B$, ed il punto $G$ nell' incontro di esso colla superficie sferica; e però sarà $H$ l' ortografia di questo medesimo incontro, ovvero del punto della superficie sferica, nel quale cade l' ombra portata su di essa dal punto $B$.

Similmente descritta la semiperiferia circolare $bge$ sulla corda $eb$ paralella al diametro $AB$, e fatto l' angolo $gbe$ eguale al $GBE$, e la $gh$ perpendicolare alla stessa corda $be$; e replicando per essa precisamente ciò che ho detto qui sopra pel diametro $BE$, si conclude essere $h$ l' ortografia dell' ombra cagionata sulla superficie sferica dal punto $b$.

Ma nei circoli $BGE$, $bge$, per essere gli angoli $GBE$, $gbe$ eguali, si ha pel corollario del *lemma diciassettesimo*

$$OE : oe = OH : oh;$$

adunque tutti i punti analoghi all' $h$, cioè appartenenti all' ortografia dimandata, saranno nella semiperiferia ellittica avente le rette $CO$, $HO$ per semiassi; vale a dire l' ortografia dell' ombra di cui si parla sarà una semiperiferia ellittica convessa $CHF$, se l'angolo $GBE$ fatto dai raggi di luce col piano ortografico sarà minore di un semiretto, una semiperiferia ellittica $CH'F$ concava, se quest' angolo risulterà maggiore di un semiretto; e si ridurrà anche allo stesso diametro $CF$, qualora il medesimo angolo eguagli un mezzo retto.

Osservazione 1. Da $a$ segamento delle $GHa$, $OD$ condotta la $aM$ perpendicolare alla $OD$ ed eguale alla $HG$, congiunta $OcM$, e dal segamento $c$ tirata la $cP$ perpendicolare alla stessa $OD$, si determinerà il punto $P$, dove il diametro $AD$ sarà segato dalla ellisse $CHF$, senza descrivere questa, parte seconda, proposizione terza, osservazione seconda.

Così, tirata $En$ perpendicolare alla verticale $OL$, ed $Hf$ alla $OD$, e segata $Os$ eguale alla $fn$, indi condotta $sd$ perpendicolare alla $DO$, la $dt$ tangente la periferia $BCD$, e la $tq$ perpendicolare alla $CO$, nel segamento $M$ delle due rette $Sd$, $tq$ si otterrà il punto della periferia ellittica corrispondente alla sua massima ascissa, osservazione dianzi citata.

Osservazione 2. Tutte le volte che sarà il quadrato della $BH$ doppio di quello della $GH$, ovvero l' angolo $GBH$ che fanno i raggi di luce col piano ortografico eguale a quello che fa la diagonale di un cubo con una faccia del medesimo, come succede nella ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, le ordinate dell' ellisse ortografica $CHF$ paralelle all' asse minore di essa saranno la terza parte delle corrispondenti della periferia circolare $CDF$.

## PROPOSIZIONE XVII.

*Data l' icnografia di una superficie emisferica che ha la base orizzontale ed è situata sotto la base medesima, trovare l' icnografia dell' ombra che accade in essa superficie.*

L' icnografia data e ad un tempo lo spaccato della superficie sia il circolo $ACBD$ (fig. 60) che ha il centro in $E$.

Condotto il diametro *AB* paralello, ed il *CD* perpendicolare alla *I*, si faccia l' angolo *HAB* eguale al Σ, cioè a quello che fanno i raggi di luce coll' orizzonte, e si tiri la *HF* perpendicolare alla *AB*, ed avransi nelle rette *EF*, *ED* due semiassi dell' ellisse rappresentante l' icnografia dimandata.

Tralascio la dimostrazione di questa soluzione, perchè sarebbe una ripetizione di quella dell' antecedente.

Osservazione. L' icnografia in quistione sarà la lunula *CADG*, o lo spazio *CADF*, ovvero il semicircolo *ACD*, secondo che l' angolo Σ sarà maggiore, oppure minore, o eguale ad un mezzo retto.

Così, se i raggi di luce avranno l' ordinaria direzione, il semiasse *EF* risulterà eguale ad un terzo dell' *ED*, come nella penultima proposizione. Di fatto, se *AH* esprimesse la diagonale di un cubo, *AF* esprimerebbe quella di una sua faccia, ed *FH* un suo lato; e però sarebbe

$$\overline{AH}^2 = 3 \cdot \overline{FH}^2. \text{ Ma è } \overline{AH}^2 = AF \cdot AB, \text{ ed } \overline{FH}^2 = AF \cdot FB, \text{ e perciò}$$

$$AF \cdot AB = 3AF \cdot FB, \text{ o sia } 2 \cdot FB = \frac{2}{3} BE;$$

adunque la rimanente parte della *BE*, cioè l' *EF*, eguaglierà $\frac{1}{3}BE$, o sia $\frac{1}{3}DE$, come nella citata proposizione.

## PROPOSIZIONE XVIII.

*Trovare l' ortografia dell' ombra che accade nell' ottava parte ordinaria di una superficie sferica, o sia sul triangolo sferico trirettangolo avente per ortografia il quadrante circolare* ABC (fig. 61) *che ha il raggio* AB *verticale.*

Per facilità il piano ortografico passi pel centro della sfera, ovvero lo stesso arco *AC* del quadrante *ABC* sia anche un lato del triangolo sferico trirettangolo.

Sulla corda *AD* paralella alla *O* si descriva il semicircolo *AFD*, facciasi l' angolo *FAD* eguale al Δ, e si tirino le *BT*, *EF* perpendicolari alla stessa corda, indi si prenda l' orizzontale *EG* eguale alla *EF*, costruiscasi l' angolo *EGH* eguale al Γ, e pel punto *H*, ove il lato *GH* di quest' angolo sega la verticale *EH*, conducasi il diametro *PHBN* del cerchio *NAC*: fatto ciò, *lemma diciassettesimo*, si descriva la porzione *xE* della periferia ellittica che passa pel punto *E* ed ha per asse *NP*, cioè la porzione di essa periferia intercetta fra il raggio *AB* e lo stesso punto *E*, e delineisi anche la parte *ET* dell' altra periferia pure ellittica, passante anch' essa per *E*, ed avente per un semiasse il raggio *BT* ed il centro in *B*, che il quadrilatero mistilineo *ATEx* sarà l' ortografia dimandata.

Egli è facile a comprendersi, mediante la proposizione antecedente, che l' arco *ET* rappresenta l' ortografia dell' ombra portata sulla superficie sferica dell' arco circolare *AT*; vera sarà pertanto la dichiarazione fatta, cioè che *ATEx* sia l' ortografia dimandata, se l' altro arco ellittico *xE* esprimerà l' ortografia dell' ombra cagionata sulla stessa superficie sferica dalla periferia del suo cerchio massimo avente l' ortografia nella verticale *AB*.

Essendo la periferia del cerchio massimo della sfera, che ha l' ortografia nella verticale $AB$ - -, una delle due linee comuni alla stessa superficie sferica ed alla involvente che passa per la medesima periferia, e queste due superficie ambedue di second' ordine, l' altra linea comune ad esse sarà piana essa pure, *lemma tredicesimo*. Ma le linee piane tracciate su di una superficie sferica sono periferie circolari, e le periferie circolari che sono in una superficie cilindrica ordinaria, qual è l' attuale involvente, si ugualgliano; adunque l' ultima delle anzidette linee comuni, per essere piana ed esistente sì nella superficie sferica che nella involvente, eguaglierà l' altra linea comune a queste superficie, e per conseguenza sarà anch' essa la periferia di un circolo massimo della sfera come la prima; quindi la sua ortografia, cioè quella dell' ombra portata sulla superficie sferica dalla periferia del cerchio massimo che ha l' ortografia nella verticale $AB$ - -, risulterà essa pure una periferia ellittica, un asse della quale sarà un diametro del cerchio $NAP$.

S' immagini il semicerchio avente $AD$ per diametro al di là dal piano ortografico e perpendicolare al medesimo, e suppongasi unito il punto $A$ al segamento fatto alla periferia di questo semicerchio, od alla superficie sferica, dalla retta perpendicolare alla $AD$ nel punto $E$: risultando l' angolo compreso dalla $AD$ e dalla retta che unisce il punto $A$ al segamento anzidetto eguale evidentemente all' $FAD$, quest' ultima retta sarà parallella ai raggi di luce; e conseguentemente, per essere $A$ comune alla periferia $CA$ ed a quella che ha l' ortografia nella verticale $AB$ - -, il segamento suddetto sarà comune ai contorni delle ombre portate sulla superficie sferica dalle stesse due periferie; quindi il punto $E$, rappresentando l' ortografia di questo segamento, apparterrà ad ambedue le periferie ellittiche $xE$, $TE$.

Similmente pel punto di contatto fra la periferia del cerchio massimo avente l' ortografia nella verticale $AB$ - - e la sua tangente, che fa con questa verticale l' angolo eguale al $\Gamma$, si suppongano tirate due rette, l' una perpendicolare alla stessa verticale $AB$ - -, e l' altra pel punto $B$ centro di detto cerchio: quest' ultima retta sarà la sezione dei piani delle due periferie, comuni sezioni alla superficie involvente e sferica, e l' angolo compreso da essa e dall' altra eguaglierà anch' esso il $\Gamma$.

Dalle cose qui esposte risulta adunque che il piano della periferia rappresentante il contorno dell' ombra portata da quella che ha l' ortografia nell'$AB$ - - passa per quel punto della superficie sferica il quale ha $E$ per ortografia, e che sega quello di quest' ultima circonferenza, lungo la retta condotta pel centro $B$ e pel contatto anzidetto.

Ora pel medesimo segamento avente $E$ per ortografia sia condotta la retta paralella a quest' ultima, essa giacerà interamente nel piano del contorno dell' ombra in quistione, e però incontrerà il piano ortografico in un punto delle retta comune a questo piano ed a quello del contorno medesimo. Ma questa retta insieme alla suddetta perpendicolare alla $AD$ tirata per $E$, e ad una parte della verticale $EH$ costituiscono evidentemente un triangolo rettangolo in $E$, il quale ha il cateto orizzontale eguale alla $EF$, e l' angolo opposto al cateto verticale eguale a quello compreso dalle due rette supposte condotte, l'una al punto $B$, e l' altra perpendicolare alla stessa verticale, dal punto di contatto fra il cerchio massimo che ha l' ortografia nella $AB$ - -, e la sua tangente che fa con questa verticale l' angolo eguale al $\Gamma$; adunque, per essere $EG = EF$, e l' angolo $EGH$ eguale al medesimo $\Gamma$, sarà $H$ il punto dove la paralella condotta pel suddetto segamento incontrerà il piano ortografico; quindi sarà $NBHP$ il diametro comune al cerchio $NAP$ ed a quello dell' estremo dell' ombra, e conseguentemente l' asse maggiore della periferia ellittica rappresentante l' ortografia dell' ombra portata sulla superficie sferica dalla periferia di quel cerchio massimo di essa che ha l' ortografia nella verticale $AB$ - -; ciò che volevasi dimostrare.

Osservazione 1. Egli è evidente che il termine $x$ dell' arco ellittico $xE$ è lo stesso piede della perpendicolare condotta superiormente alla verticale $AB$ dal punto di contatto fra il cerchio avente l' ortografia nella stessa $AB$ - - e la sua tangente che comprende con questa l' angolo eguale al $\Gamma$. Ma se il medesimo cerchio insieme a questa perpendicolare ed al raggio tirato dallo stesso punto di contatto si fa rotare attorno alla verticale $AB$, in modo che si disponga nel piano $NAB$, e sia in questa posizione la periferia rappresentata dalla $ALN$, la perpendicolare dalla $Lx$, e però il raggio dalla $BL$, si ha il triangolo $BLx$ rettangolo in $x$, il cui angolo $BLx$ eguaglia il $\Gamma$.

Adunque, facendo l' angolo $LBx$ eguale al complemento del $\Gamma$ e tirando $Lx$ perpendicolare alla $AB$, si determinerà il punto $x$, dove la stessa $AB$ verrà segata dall' arco ellittico $xE$, senza descriver questo.

Osservazione 2. Essendo il piano che passa per $AD$, ed è perpendicolare all' ortografico, tangente la superficie involvente che ha per base il cerchio, la cui ortografia è la stessa $AB$ - -, la retta $AE$ sarà tangente l' ellisse $NEP$ nello stesso punto $E$.

Osservazione 3. Se i raggi di luce avranno la direzione che fissano generalmente i disegnatori, l' angolo $EGH$ sarà semiretto, il punto $D$ cadrà in $C$, ed $ED$ risulterà un terzo, proposizione antepenultima, della corda $AD$, ora $AC$ ( fig. 62 ); o sia sarà

$$\overline{AC}^2 = 2r^2,\ EC = \frac{1}{3} AC,\ AE = \frac{2}{3} AC; \text{ e però}$$

$$AE \cdot EC, \text{ od } \overline{EF}^2 \text{ eguaglierà } \frac{2}{9} \cdot \overline{AC}^2 = \frac{4}{9} r^2, \text{ oppure}$$

$EF$ ed anche $EH$ eguale a $\frac{2}{3}r$. Ma $EM$ eguaglia $\frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}r$; adunque sarà $EH = 2 \cdot EM$.

Pertanto segata $CE = \frac{1}{3} AC$, tirata $EM$ perpendicolare alla $BC$, e prolungata di $HM = EM$, e condotta la retta $NBHI$, si avrà in questa, senza alcun' altra operazione, l' asse maggiore dell' ortografia $xVE$.

Condotta $PQEX$ perpendicolare alla $BI$, e congiunta $XB$; essendo $BM = \frac{2}{3} r = 2 \cdot HM$, ed i triangoli $MBH$, $PQB$, $MQE$ simili, avrassi $BP = 2PQ$, $ME = 2MQ$; e però

$$QM = \frac{1}{2} ME = \frac{r}{6},\ QE = \sqrt{(\overline{QM}^2 + \overline{EM}^2)} = \frac{r}{6}\sqrt{5},$$

$$BQ = BM - QM = \frac{r}{2},\ PQ = BQ : \sqrt{5} = \frac{r}{2\sqrt{5}},\ BP = \frac{r}{\sqrt{5}}; \text{ così}$$

$$PE = PQ + QE = \frac{4}{3}\frac{r}{\sqrt{5}}, \text{ e } PX = \sqrt{(\overline{BX}^2 - \overline{BP}^2)} = \frac{2r}{\sqrt{5}}. \text{ Quindi sarà}$$

$$PE : PX = \frac{4r}{3\sqrt{5}} : \frac{2r}{\sqrt{5}}, \text{ oppure } PE = \frac{2}{3} PX.$$

Ma il rapporto che ha l' ordinata $PE$ dell' ellisse $NEI$ alla corrispondente $PX$ del cerchio $NAI$ è eguale a quello che hanno due qualunque ordinate analoghe di queste due linee; adunque le ordinate della periferia ellittica $NEI$ perpendicolari all' asse $NI$ sono due terzi delle corrispondenti della periferia circolare $NAI$; e però la stessa periferia ellittica descrivibile facilissimamente.

Così, tirata $BT'$ paralella alla $QE$, sarà $ET' = EC$, per essere $BQ = QC$;

E però, segata $AT' = CE$ od eguale ad un terzo della $AC$, e congiunta $BT'$, indi presa $BV = \frac{2}{3} BC$, sarà $BV$ l'asse minore dell'ellisse in quistione. Similmente, fatto l'angolo $LBx$ semiretto, e condotta $Lx$ perpendicolare alla $AB$, otterrassi $x$ termine superiore dell'arco ellittico $xVE$.

## PROPOSIZIONE XIX.

*Data la periferia dello spaccato ordinario di una superficie sferica e l'ortografia di una sua sezione od apertura orizzontale, trovare l'ortografia dell'ombra portata dalla circonferenza, lembo di questa sezione, sulla superficie stessa; ammesso che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.*

La periferia dello spaccato della superficie sferica sia $ABF$ (fig. 63), che ha il centro in $D$, e l'ortografia e ad un tempo diametro dell'apertura sia la corda orizzontale $AB$.

Si unisca il punto $E$ di mezzo della $AB$ al $D$, seghisi $DL$ eguale ad un terzo di $ED$, si tiri $LM$ perpendicolare alla stessa $DE$ ed eguale ad $LE$, si congiunga $DM$, ed a questa si conduca la perpendicolare $nMm$; indi si prendano le $nM$, $mM$ eguali entrambe alla $AE$, e le $Mr$, $Ms$ eguali a due terzi della medesima $AE$, ed avransi nelle rette $mn$, $rs$ i due assi della ellisse $rnsm$, che rappresenta l'ortografia dimandata.

La superficie involvente, avendo per base l'apertura, sarà di second'ordine come la sferica; e però, siccome la periferia della medesima apertura è una delle linee comuni a queste due superficie, l'altra loro comune sezione, cioè l'ombra di cui si tratta, risulterà piana anch'essa, *lemma tredicesimo*; e quindi sarà una circonferenza eguale al lembo della stessa apertura, trovandosi e nella superficie sferica e nell'involvente, la quale è in questo caso cilindrica ordinaria.

Essendo l'ombra una periferia circolare, la sua ortografia sarà in generale un'ellisse avente l'asse maggiore nell'ortografia di quel diametro della stessa periferia circolare, il quale è parallelo al piano ortografico, e per conseguenza sarà quest'asse eguale ad $AB$; più il centro della medesima ellisse, al solito, si troverà nell'ortografia del centro della medesima periferia circolare.

S'immagini il piano lungo la retta che unisce il punto $D$ al centro della periferia dell'ombra, ed è perpendicolare a quel diametro di questa periferia parallelo al piano ortografico; il medesimo piano in virtù di queste due proprietà risulterà perpendicolare all'ortografico medesimo, all'asse maggiore dell'ellisse dimandata, e passerà pel centro di questa; quindi l'asse maggiore della stessa ortografia richiesta sarà perpendicolare alla retta che unisce il suo centro al $D$, ed il minore cadrà in questa medesima retta.

Ora figurisi il cubo che ha una diagonale nella retta che congiunge $E$ al centro dell'ombra, e due spigoli nelle $EB$, $ED$, e si comprenderà facilmente che la distanza dal centro dell'ombra alla $DE$ è una diagonale della base inferiore di questo cubo, e che le distanze dall'ortografia del medesimo centro, o sia dal centro dell'ortografia dimandata, alle rette $AB$, $DC$ sono lati del cubo stesso: e si supponga che il piano della detta diagonale di questo cubo e della verticale $CD$, col rotare attorno a questa, si disponga nell'ortografico insieme alla medesima diagonale del cubo, a quella della sua base inferiore e che ha un termine nella $DE$, e con esso loro quel diametro dell'ortografia il quale trovasi nello stesso piano rotante.

Rappresentando colla *FG* eguale alla *AB* questo diametro, dopo l'immaginata rotazione, le rette *HE*, *HL* tirate dal punto *H* di mezzo della *FG*, la prima al punto *E*, e l'altra perpendicolare alla *ED*, rappresenteranno le dette diagonali del cubo e della sua base; come *EL* esprimerà il lato del cubo medesimo che trovasi nella *ED*, ed attorno cui esso cubo ha rotato; quindi, per essere

$$\overline{LH}^2 = 2 \cdot \overline{EL}^2,\ DH = DE,\ \overline{DH}^2 = \overline{DL}^2 + \overline{LH}^2, \text{ si avrà}$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{DL}^2 + 2 \cdot \overline{EL}^2.$$

Ma $\overline{DE}^2$ è anche eguale a $\overline{DL}^2 + 2DL \cdot LE + \overline{LE}^2$; adunque sarà

$$\overline{DL}^2 + 2DL \cdot LE + \overline{LE}^2 = \overline{DL}^2 + 2 \cdot \overline{EL}^2,$$

$$\text{o sia } 2DL \cdot LE = \overline{LE}^2, \text{ cioè } DL = \frac{1}{2} LE = \frac{1}{3} DE,$$

$$\text{ed } EL = \frac{2}{3} DE.$$

Pertanto, siccome il centro dell' ortografia dimandata si deve trovare nell' orizzontale *LH*, ed avere dalla verticale *DE* una distanza eguale al lato del cubo, cioè alla *EL*, esso centro si troverà in *M*, stante che si è fatto $LM = EL = \frac{2}{3} DE$, vale a dire eguale al lato del cubo stesso.

Così, essendo la retta che unisce il punto *D* al centro della periferia dell' ombra perpendicolare al piano di essa periferia, e quella che congiunge il centro della medesima al punto *M* perpendicolare al piano ortografico, l' angolo compreso da queste rette sarà eguale a quello che fa col piano ortografico quel diametro di essa periferia il quale ha per ortografia l' asse minore dell' ellisse dimandata: conseguentemente il rapporto geometrico fra l' asse minore ed il diametro della periferia dell' ombra eguaglierà quello del lato del cubo alla retta *DE*, o sia di *LE* alla *DE*. Ma quest' ultimo rapporto è eguale a due terzi; adunque l' asse minore della richiesta ortografia dovrà essere due terzi di *AB*.

Dalle cose esposte si raccoglie adunque che l' ortografia dimandata debb' essere la periferia ellittica che ha il centro in *M*, l' asse minore nella *DM* ed eguale a due terzi della *AB*, e l' asse maggiore eguale alla stessa *AB*, appunto come ho asserito nell' esposta determinazione della presente proposizione.

Osservazione. Siano condotte le corde *AA'*, *BB'* del circolo *ABF* fra loro paralelle, e tali che l' angolo *BAA'* sia semiretto, e per esse passino due piani perpendicolari all' ortografico: questi due piani, passando per le rette generatrici della superficie involvente che hanno le ortografie *AA'*, *BB'*, ed anche per le tangenti di queste superficie condotte pei punti *A*, *B* perpendicolarmente al piano ortografico, toccheranno tangenzialmente la medesima superficie involvente; e conseguentemente le loro tracce ortografiche, cioè le rette *AA'*, *BB'*, saranno tangenti l' ortografia medesima *nsmr*.

Essendo le tangenti *A*1*A'*, *B*2*B'* dell' ellisse *nsmr* paralelle fra loro, i contatti 1, 2 di esse con quest' ellisse saranno i due termini di un diametro della medesima; così, per essere i punti *A*, *B* comuni alla periferia *ABF* ed a quella dell' apertura, le ortografie dei punti della superficie sferica, nei quali cadono le ombre portate dai medesimi *A*, *B*, cioè i contatti 1, 2, si troveranno nell' ellisse rappresentante l' ortografia dell' ombra portata dalla *ABA'*, e nella stessa *nsmr*.

Quindi il diametro 12 della medesima ellisse *rnsm* sarà anche una corda di quest' altra ortografia; e però i suoi termini, o sia i punti 1, 2, saranno

distanti dagli $A'$, $B'$ di una terza parte delle corde $AA'$, $BB'$, proposizione quindicesima.

E conseguentemente questi punti saranno facilmente determinabili senza la descrizione dell' ellisse *rnsm*, ciò che sarà utile in molte occasioni.

Similmente, le rette $AB$, $12$, $A'B'$ concorrendo ad un punto distante di $\frac{1}{2}AA'$ da quello di mezzo della $AA'$ stessa, e la distanza fra questa e l' 1 essendo $\frac{1}{6}AA'$, sarà la tangente dell' angolo compreso dalla retta 12 e da quella tirata pel punto $D$ perpendicolarmente alla $AA'$ eguale $\frac{1}{6}AA'$ diviso per $\frac{1}{2}AA'$, cioè eguale ad $\frac{1}{3}$. Ma l' angolo che fa quest'ultima retta colla verticale $ED$ è semiretto, e però la sua tangente eguale ad uno; adunque la tangente dell' angolo compreso dalle $CD$, 12 eguaglierà

$$\left(1-\frac{1}{3}\right):\left(1+\frac{1}{3}\right), \text{ o sia } \frac{1}{2};$$

ciò che è singolare.

## PROPOSIZIONE XX.

*Data l' ortografia di una superficie sferica e quella di una sua sezione orizzontale, trovare l' ortografia dell' ombra che porta la periferia di questa sezione od apertura sulla superficie stessa, qualunque sia la direzione dei raggi di luce.*

Il cerchio $ABEF$ (fig. 64) avente il centro in $C$ sia l' ortografia della superficie sferica, e la retta $AB$ sia quella della sua sezione orizzontale, ed il piano ortografico passi pel centro della sfera medesima.

Si faccia l' angolo $FAB$ eguale al $\Sigma$, la corda $FE$ alla $AB$, e la $CD$ perpendicolare alla stessa $AB$; pel punto $G$ di mezzo della $EF$ tirisi $GH$ orizzontale, e si descriva l' arco circolare $CP$ col centro $H$ alla distanza $GH$; indi si costruisca l' angolo $GHP$ eguale a quello che fa l' icnografia della paralella ai raggi di luce col piano ortografico, e si tiri $IP$ perpendicolare alla $GH$, congiungasi $CIm$, si seghi $CM = IP$ e conducasi $MN$ paralella alla $AC$: in fine prendansi le $It$, $Im$ eguali alla $AN$, e le $In$, $Is$ eguali alla $AD$ e perpendicolari alla $CIm$, e saranno $tm$, $ns$ i due assi della periferia ellittica che rappresenta l' ortografia dimandata.

Che l' ombra debba essere una periferia circolare eguale a quella dell' apertura medesima, e la sua ortografia in generale un' ellisse avente l' asse maggiore eguale alla $AB$ e perpendicolare alla retta che unisce il suo centro al $C$, si dimostra precisamente come nella proposizione precedente.

S' immagini per la $CD$ il piano paralello ai raggi di luce, e si segherà la linea dell' ombra, cioè l' ombra stessa, e l' apertura in due diametri, e si suppongano unite tanto le due estremità di questi diametri, le quali sono dalla stessa parte della retta che congiunge i punti di mezzo di essi, quanto le altre due; ed avransi due rette paralelle ai raggi di luce, le quali coi diametri medesimi formeranno un trapezio eguale perfettamente all' $ABEF$.

Il trapezio, così costituito, col rotare attorno alla verticale $CD$, si adatti sul suo eguale $ABEF$; evidentemente il centro della periferia dell' ombra cadrà in $G$ punto di mezzo della $EF$; ma l'angolo descritto dal piano di questo trapezio per adattarsi a quello dell'$ABEF$ è lo stessissimo angolo compreso da essi piani, e però eguale al $PHG$; adunque, se il triangolo $GHP$, rotando intorno alla $HG$, disporrassi nel piano orizzontale e da quella parte del piano ortografico ove si troverà il centro dell' ombra, l'arco $GP$ coinciderà con quello descritto dal centro medesimo per passare in $G$; quindi la retta $IP$ eguaglierà la distanza fra il piano ortografico ed il centro della periferia dell'ombra, ed il punto $I$ sarà l' ortografia del medesimo centro o sia dell'ortografia dimandata.

Ma la retta eguale a $CD$ e che unisce $C$ al centro dell' ombra è perpendicolare al piano di questa, e quella che congiunge il medesimo centro ad $I$, sua ortografia, lo è all' ortografico; sarà adunque, come nell' antecedente proposizione, $CD$ ad $IP$ geometricamente, come l' asse maggiore dell' ortografia, cioè $AB$, al minore, oppure come le loro metà; e conseguentemente essendo per costruzione

$$CD : CM \text{ ovvero } IP = AD : AN,$$

la retta $AN$ eguaglierà il semiasse minore dell' ortografia dimandata.

Quindi, per essere le parti $Im$, $It$ della $Cm$ ambe eguali alla $AN$, e le $IN$, $Is$ perpendicolari alla stessa $Cm$ ed eguali alla $AD$, le rette $tm$, $ns$ saranno i due assi della periferia ellittica $mnts$ rappresentante l' ortografia dimandata; ciò che ecc.

Osservazione 1. Le rette $AA'$, $BB'$ paralelle alla $O$ toccheranno l' ellisse $mnts$ nei termini di un diametro di essa, il quale sarà una corda dell' ortografia di cui si è parlato nella proposizione sedicesima;

E però descritte due semiperiferie circolari sulle $AA'$, $BB'$, e tirate pei punti $A$, $B$ quelle corde di esse che fanno coi loro diametri $AA'$, $BB'$ angoli eguali al $\Delta$, e conducendo dai punti, ove queste ultime corde segano le stesse semiperiferie, le perpendicolari ai diametri medesimi $AA'$, $BB'$, nei piedi di queste avransi i punti delle rette $AA'$, $BB'$, dove esse medesime sono toccate dalla periferia ellittica $nmrs$; e tutto ciò si avrà senza descrivere questa periferia.

Osservazione 2. Posto $CD=a$, $AD=r$, $CI=b$, $CDG=\alpha$, $GHP=\beta$, si ha

$$DG=2a\cos.\alpha,\ DH=2a\cos.^2\alpha,\ GH=a\,\text{sen}.\,2\alpha,$$

$$CH=-a\cos.2\alpha,$$

$$IH=a\,\text{sen}.\,2\alpha\cos.\beta,\ IP=a\,\text{sen}.\,2\alpha\,\text{sen}.\,\beta,\ CI$$

o sia $b=a\sqrt{(\cos.^2 2\alpha+\text{sen}.^2 2\alpha\cos.^2\beta)}=a\sqrt{(1-\text{sen}.^2 2\alpha\,\text{sen}.^2\beta)}$,

ed $\overline{AC}^2=a^2+r^2$, $It=r\,\text{sen}.\,2\alpha\,\text{sen}.\,\beta$.

Così riferendo l' ellisse $mnts$ e la circonferenza $ABF$ a coordinate ortogonali prese dal punto $C$, e che le ascisse siano nella $Cm$; e chiamate $x$ l' ascissa, ed $y$ l' ordinata corrispondenti dell' ellisse, ed $x_{,}$, $y_{,}$ le analoghe della periferia $ABC$, si hanno per equazioni di queste linee le seguenti:

$$\overline{It}^2\cdot y^2+\overline{In}^2\cdot(x-b)^2=\overline{It\cdot In}^2,\ y_{,}^2+x_{,}^2=\overline{AC}^2,$$

le quali si riducono alle altre

$$y^2\,\text{sen}.^2 2\alpha\,\text{sen}.^2\beta+(x-b)^2=r^2\,\text{sen}.^2 2\alpha\,\text{sen}.^2\beta,$$

$$x_{,}^2+y_{,}^2=a^2+r^2,$$

sostituendo in esse per le rette $It$, $nI = AD$, $AC$ i loro valori sopra trovati; e però nominata $t$ l' ascissa, ed $u$ l' ordinata comune a queste due linee, si avrà

$$u^2 \, sen.^2 \, 2\alpha \, sen.^2 \beta + (t-b)^2 = r^2 \, sen.^2 \, 2\alpha \, sen.^2 \beta,$$
$$t^2 + u^2 = a^2 + r^2,$$

proprietà particolari delle coordinate $t$, $u$.

Eliminando l' $u$ da queste ultime due equazioni, si ottiene la sola

$$(1 - sen.^2 \, 2\alpha \, sen.^2 \beta) \, t^2 - 2bt + a^2 = 0,$$

ovvero $b^2t^2 - 2a^2bt + a^4 = 0$,

ponendo in vece di $1 - sen.^2 \, 2\alpha \, sen.^2 \beta$ il suo valore $\frac{b^2}{a^2}$ desunto dall' equazione

$$b = a\sqrt{(1 - sen.^2 \, 2\alpha \, sen.^2 \beta)}$$

esposta superiormente.

L' equazione $b^2t^2 - 2a^2bt + a^4 = 0$, o sia l' equivalente $(bt - a^2)^2 = 0$, dà $bt = a^2$; e però sarà

$$b : a = a : t, \text{ ovvero } CI : CD = CD : t,$$

cioè l' ascissa comune alle linee *mnts*, *ABF* debb' essere terza proporzionale geometrica dopo le due rette conosciute *CI*, *CD*; quindi tirando per *D* la retta che fa colla *DC*, ed a destra di essa l' angolo eguale al *DIC*, essa segherà una parte della *Cm*, la quale sarà la medesima ascissa $t$. Imperciocchè, nominato $p$ il punto dove la *Cm* è segata dalla retta, così trovata, i triangoli *DpC*, *DIC* simili danno

$$CI : CD = CD : Cp, \text{ cioè } Cp = t$$

per la proporzione dianzi dimostrata.

Così, tirando pel termine $p$ dell' ascissa qui determinata la perpendicolare alla medesima ascissa, ed estendendola da ambe le parti a segare la periferia *ABF*, si avranno in questi segamenti i punti comuni alle linee *ABF*, *mnts*, i quali saranno anche due punti di contatto di esse.

Sostituendo nell' equazione $t^2 + u^2 = a^2 + r^2$, in vece di $t$, il suo valore $\frac{a^2}{b}$, o sia $a : \sqrt{(1 - sen.^2 \, 2\alpha \, sen.^2 \beta)}$, e liberando la $u$, si ha, indicando colla $R$ il raggio $AC$,

$$u = \sqrt{\frac{r^2 - R^2 \, sen.^2 \, 2\alpha \, sen.^2 \beta}{cos.^2 \, 2\alpha + sen.^2 \, 2\alpha \, cos.^2 \beta}},$$

$$\text{ovvero } u = \frac{1}{b}\sqrt{(a^2r^2 - R^2 \cdot \overline{IP}^2)},$$

per essere $a^2 \, sen.^2 \, 2\alpha \, sen.^2 \beta = \overline{IP}^2$, ed $a\sqrt{(cos.^2 \, 2\alpha + sen.^2 \, 2\alpha \, cos.^2 \beta)} = b$.

Ma condotta *DO* perpendicolare al raggio *AC*, si hanno i triangoli simili *ADC*, *ODC*, che danno

$$AC : AD = CD : OD, \text{ o sia } R \cdot OD = ar; \text{ adunque sarà}$$

$$u = \frac{R}{b}\sqrt{(\overline{OD}^2 - \overline{IP}^2)}.$$

Questo valore della $u$ insegna che le due linee *nmrs*, *ABF* toccheransi nei suddetti due punti, purchè sia *OD* maggiore di *IP*, e che i due punti di contatto si ridurranno ad un solo, e situato nel prolungamento della retta *CI*, allorchè sarà *IP* eguale alla *OD*; in fine che l' ellisse cadrà interamente dentro del cerchio quando sarà *OD* minore della *IP*.

Se i raggi di luce saranno paralelli al piano ortografico, risulterà $IP = 0$, e però l' ortografia ridurrassi alla semplice retta *ns*.

Osservazione 3. Per avere l' icnografia dell' ombra che ho considerato in quest' ultima proposizione, supposta l' icnografia della medesima sfera espressa dal cerchio *LQ* (fig. 65) avente il centro in *C*;

Si tiri la retta *Cz* paralella alla *I*, si seghi *Ch* eguale alla *GH* della figura antecedente, e le *hz*, *hy* eguali amendue alla *Gx* della medesima figura, e compresa fra *G* ed il piede *x* della *Fx* tirata dal punto *F* perpendicolarmente alla *Hx*, e si facciano le *hω*, *hk* perpendicolari alla stessa *Cz* ed eguali alla *AD*, ed avransi nelle *kω*, *yz* i due assi della periferia ellittica rappresentante l' icnografia dimandata.

Questa regola è un' immediata conseguenza di ciò che ho conchiuso dianzi per l' ortografia della medesima ombra.

Qualunque sia la direzione dei raggi di luce, evidentemente si ha $Gx = -r \cos. 2\alpha$ (fig. 64); adunque, per essere nell' ipotesi ordinaria $\cos. 2\alpha = -\frac{1}{3}$, sarà in tal caso $Gx = \frac{1}{3}$, vale a dire l' asse minore dell' icnografia anzidetta un terzo dell'altro asse di essa.

Osservazione 4. Se la retta *I — O* sarà paralella al piano ortografico, la linea *mnts* ridurrassi ad una retta eguale alla *AB*; così se l' angolo Σ sarà semiretto, e la retta *I* perpendicolare al piano ortografico, la linea medesima *mnts* risulterà la periferia del cerchio avente il centro in *C* ed il raggio eguale all' *AD*; tutto questo è per sè stesso evidente.

## PROPOSIZIONE XXI.

*Data l'ortografia di una superficie sferica e quella d'una sua sezione piana qualunque, trovare l'ortografia dell'ombra che porta la periferia di questa sezione sulla medesima superficie.*

La periferia circolare *BUC* (fig. 66) che ha il centro in *A* rappresenti l' ortografia e lo spaccato ordinario della sfera, e l' ellittica *βαF* avente il centro in *D* esprima l' ortografia della sezione.

Pel punto *D* centro della periferia ellittica *βαF* si tiri la retta *BC* paralella alla *O*, e su di essa si descriva il cerchio *BMC*, e dai termini del diametro *EF* della stessa ellisse *βαF* si tirino le *EG*, *FH* perpendicolari al medesimo, e dai punti ove queste segano la periferia *MC* conducansi le *HL*, *GM* fra loro paralelle e che facciano colla *BC* l' angolo eguale al Δ, e congiungasi *LM*; e dal punto *N* di mezzo di essa tirisi *NP* perpendicolare alla *BC*, uniscasi il punto *P* all'*A*, ed a questa conducasi la perpendicolare *RPQ*; indi seghisi $PV = AP$, congiungasi *VN*, si ponga $NX = NL$, si tiri *XZ* perpendicolare alla *NP*; e finalmente prendasi $PS = PT = NZ$, $PQ = PR = LN$, e saranno *ST*, *RQ* i due assi dell' ellisse che rappresenta l' ortografia richiesta.

L' ombra sarà la periferia di un circolo eguale alla sezione data, la sua ortografia un' ellisse che avrà il centro nell' ortografia di quello della medesima periferia, l' asse maggiore eguale al diametro della periferia stessa e perpendicolare alla retta che unirà il centro di essa ellisse a quello della sfera, ed il minore eguale alla quarta proporzionale geometrica, dopo la distanza fra il centro della sfera e quello dell' ombra, la perpendicolare tirata da questo centro al piano ortografico, e l' asse maggiore della stessa ortografia o sia diametro dell' ombra medesima.

Non dimostro queste verità, perchè non farei che ripetere ciò che ho detto nelle due proposizioni antecedenti, e passo in vece a mostrare che esse sono soddisfatte nella costruzione eseguita.

Disponendo il semicerchio $BLC$ insieme a tutte le rette disegnate in esso sul suo diametro $BC$ al di là e perpendicolarmente al piano ortografico, la retta $GH$ coinciderà con un diametro della detta sezione, e le $GM$, $HL$ colle rette condotte paralellamente ai raggi di luce pei termini di questo medesimo diametro; e però in questa situazione la retta $LM$ si troverà in un diametro della periferia dell' ombra, ed il punto $N$ nel centro di essa; quindi sarà $NP$ eguale alla perpendicolare tirata da questo centro al piano ortografico, e $P$ l' ortografia stessa del medesimo centro, ovvero centro dell' ellisse dimandata.

Essendo $P$ il centro dell' ortografia richiesta, la retta $RQ$ esprimerà il suo asse maggiore, per ciò che ho detto superiormente; così, per essere

$$\overline{VN}^2 = \overline{VP}^2 + \overline{PN}^2, \text{ o sia ad } \overline{AP}^2 + \overline{NP}^2,$$

$VN$ eguaglierà la distanza fra il centro della periferia dell' ombra e quello della sfera; e però siccome si ha per costruzione

$$NV : NP = NX : NZ, \text{ o sia } NV : NP = PQ : NZ,$$

e si è fatto $PS = PT = NZ$, sarà $ST$ l' asse minore dell' ellisse $QTRS$; vale a dire la periferia rappresentante l' ortografia dimandata avrà per assi le rette $RQ$, $ST$, come ho detto nella determinazione.

Osservazione i. Se la sezione od apertura data, in vece di essere nell'emisfero posteriore al piano ortografico, come ho supposto tacitamente qui sopra, fosse nell' emisfero anteriore,

Si condurrebbero le rette $EG'$, $FH'$ perpendicolari alla $BC$, e dai punti $G'$, $H'$ due paralelle alla stessa $GM$; indi si procederebbe alla determinazione degli assi dell' ortografia dell' ombra precisamente, come ho praticato sopra.

Così se la medesima apertura sarà parte in uno dei due suddetti emisferi e parte nell' altro (fig. 67), cioè se l' ellisse $\alpha\beta F$ toccherà in due punti la periferia $BUC$; ammesso $\alpha E\beta$ l' ortografia di quella parte dell' apertura, la quale è anteriore al cerchio $BUC$,

Condurransi le $EG$, $FH$ perpendicolari alla $BC$, le $GM$, $HL$ paralelle fra loro e facenti colla $BC$ l' angolo $\Delta$ o sia quello compreso da questa e dai raggi di luce, e poscia si continuerà, come lo mostra l' ispezione della figura, quasi come sopra.

In ultimo, qualora il piano dell' apertura sia perpendicolare all' ortografico, ovvero sia l' ortografia di essa una corda del cerchio $BUC$,

Condurrassi pel punto di mezzo di questa corda l' altra corda del medesimo cerchio $BUC$ paralella alla $O$, e su di essa qual diametro si descriverà una semiperiferia circolare; indi si tirerà al diametro medesimo

la perpendicolare che passa pel punto comune ad esso ed alla corda ortografia data, e dai segamenti di questa perpendicolare colla periferia descritta condurransi le due rette fra loro paralelle e che fanno col diametro di essa l' angolo eguale al $\Delta$: fatto questo, si continuerà la determinazione della presente ortografia richiesta in un modo similissimo all' ultimo esposto.

Quando la $BC$ passerà pel punto $A$, le rette $AP$, $BC$ coincideranno; e però in tal caso l' asse maggiore $RQ$ sarà perpendicolare alla medesima $BC$.

Osservazione 2. Se il piano della periferia dell' ombra risulterà perpendicolare ovvero paralello all' ortografico correlativamente, la linea $RSQT$ si ridurrà ad una retta ovvero ad una periferia circolare.

ALTRO METODO PER DESCRIVERE IN TUTTI I CASI L' ORTOGRAFIA DI CUI SI PARLA NELL' ULTIMA PROPOSIZIONE.

Si conducano le rette $ADB$, $EG$, $FH$, $HL$, $GM$ ( fig. 68 ) come sopra, si tirino le $LN$, $MP$ perpendicolari alla $AB$, e si avrà nella retta $NP$ evidentemente un diametro dell' ortografia dimandata; indi si conduca $RS$ paralella alla $AB$ e tangente l' ellisse $EQF$, e su di essa descrivasi il semicerchio $RVS$, si tiri pel punto $Q$ di contatto la $QT$ perpendicolare alla $RS$, e $TV$ paralella alla $GM$, $VX$ perpendicolare alla $RS$, e sarà $X$ il punto di contatto fra $RS$ e l' ortografia richiesta; quindi congiunta $X$ col punto $O$ di mezzo della $NP$, si otterranno nelle rette $XO$, $NO$ due semidiametri conjugati dell' icnografia stessa; e però sarà essa descrivibile facilissimamente col *lemma quattordicesimo.*

Di fatto, facendo passare per $RS$ il piano perpendicolare all' ortografico, risulterà esso tangente la superficie involvente, e però la sua traccia $RS$ tangente l' ellisse $NPX$. Ma rotando il semicerchio $RVS$ attorno alla $RS$ ed in modo che si disponga dietro al piano ortografico e perpendicolare al medesimo, il punto $T$ passa nel punto di contatto fra il detto piano e la sezione data, la retta $TV$ nella generatrice della medesima superficie involvente che passa per questo punto di contatto; adunque ecc.

## PROPOSIZIONE XXII.

*Data l' ortografia di una superficie sferica e quella di una sua apertura qualunque, determinare l' ortografia dell' ombra portata sulla superficie stessa dal lembo di questa sua apertura.*

Il cerchio $ABC$ ( fig. 69 ), che ha il centro in $E$, sia l' ortografia, e nel medesimo tempo lo spaccato ordinario della superficie sferica, e la linea $FNG$ sia l' ortografia del lembo dell' apertura della medesima superficie.

Pel punto $F$ dell' ortografia $FNG$ si tiri $AC$ paralella alla $O$, si descriva sopra di essa il semicerchio $ALMC$, e la $FL$ sua perpendicolare; tirisi $LM$, che faccia colla $AC$ un angolo eguale al $\Delta$; conducasi $Mf$ pel segamento $M$ e perpendicolare alla stessa $AC$, che $f$ rappresenterà l'ortografia del punto

della superficie sferica, nel quale cadrà l' ombra portata da quella del lembo dell' apertura, il quale ha l' ortografia in $F$: in un modo similissimo si avranno anche gli altri punti dell' ortografia dimandata.

Se il semicerchio $ALC$ insieme alle rette $FL$, $LM$, $Mf$ col rotare attorno al diametro $AC$ si disporrà al di là e perpendicolarmente al piano del cerchio massimo $ABC$ della sfera, in questa situazione $L$ troverassi nel punto del contorno dell' apertura, che ha $F$ per ortografia, e la retta $LM$ nella paralella ai raggi di luce che passa pel medesimo punto; e però il punto $M$ si troverà in quello della superficie, nel quale cadrà l' ombra portata dal punto stesso dell' apertura, il quale ha per ortografia $F$; quindi essendo $Mf$ perpendicolare alla $AC$ diametro attorno cui ha rotato il semicerchio $AMC$, sarà $f$ un punto della linea $fng$ ortografia dimandata; come volevasi dimostrare.

Osservazione 1. Se l' apertura sarà nell' emisfero anteriore al cerchio $ABC$ massimo della sfera, ovvero parte in questo e parte nell' emisfero posteriore al medesimo cerchio massimo, si faranno alla regola qui esposta, per avere la linea $fng$, delle modificazioni simili a quelle che ho dichiarato nell' osservazione della proposizione antecedente per la regola colà esposta.

Corollario. L' arco $fn$ compreso fra le $Ff$, $Nn$ paralelle ambedue alla $O$ rappresenterà l' ortografia dell' ombra portata sulla superficie sferica dalla porzione del contorno del foro dato, che ha l' ortografia nella parte $NF$ della curva $FNG$ compresa fra le paralelle stesse $Ff$, $Nn$.

Osservazione 2. Tutto quello che ho detto nelle ultime proposizioni relativamente alle ortografie, si estende, senza verun notabile cambiamento, anco alle corrispondenti icnografie.

## PROPOSIZIONE XXIII.

*Trovare l' ortografia e l' icnografia dell' ombra che porta una linea qualunque sopra una data sfera.*

Siano $ABC$, $abc$ (fig. 70) l' ortografia e l' icnografia della linea che porta l' ombra, ed i circoli $EN$, $sV$ aventi i centri in $F$, $f$ siano le analoghe projezioni della sfera.

Si conduca $PF$ paralella all' asse $ML$: fatto ciò, da $B$ punto qualunque della $ABC$ si tiri $BPb$ perpendicolare alla $ML$ medesima, indi $BR$ paralella alla $I$, $bt$ alla $O$, $bp$ perpendicolare alla $bt$ ed eguale alla $BP$; si tiri la $pn$ che faccia colla $bt$ l' angolo eguale al $\Delta$, e dai punti $h$, $n$, ove essa sega la periferia circolare descritta sulla corda $st$ qual diametro, tirinsi le $hi$, $nr$ perpendicolari alla $bt$; e poi si conducano le $iI$, $rR$ perpendicolari alla $ML$, che i punti $i$, $I$ ovvero $r$, $R$ apparterranno evidentemente all' ortografia ed icnografia dimandate: saranno i due primi, se l' ombra cadrà sulla convessità della sfera, ed i due altri, se essa cadrà nella concavità.

Facendo fare al trapezio $bpnr$ ed al cerchio $sht$ un quarto di rotazione attorno a $PF - br$ per cui esso passi innanzi a questa retta, il suo lato $pn$ si confonderà colla $BR - br$ paralella ai raggi di luce, il cerchio $sht$ col circolo della sfera, il quale è perpendicolare al piano ortografico, e di cui un diametro ha per ortografia $st$; e però il punto della superficie sferica, nel quale cadrà l' ombra portata dal $B - b$ della linea $ABC - abc$ obbiettiva, sarà quello in cui trovasi ora $h$, ovvero l' altro nel quale sarà passato l' $n$; quindi ecc.

Osservazione. Se la linea $ABC-abc$ fosse retta, l' ortografia e l'icnografia in quistione in generale sarebbero ellissi, e però si potrebbero descrivere anco col *lemma quattordicesimo*, determinando primieramente due diametri conjugati di esse; ma siccome la sfera è una superficie di rotazione e dell' ombra portata da una retta su queste altre superficie, di cui parlerò estesamente altrove; così ommetto per ora qualunque sviluppo relativo a questo caso particolare, benchè frequentissimo in pratica.

## DE' CONTORNI

### DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE DI UN' ELLISSOIDE QUALUNQUE, DI UNA PARABOLOIDE ELLITTICA E DI UN' IPERBOLOIDE A DUE FOGLIE.

### PROPOSIZIONE XXIV.

*Ammesse le tre superficie collocate e conosciute come nella proposizione quarta della parte antecedente, trovare l' ortografia dell' ombra portata dalla prima sezione sopra di esse superficie.*

Sia $AVB$ (fig. 71) l' ortografia della superficie ed anche la sua prima sezione, cioè quella paralella al piano ortografico.

Nella soluzione di questa proposizione seguirò l' ordine stesso che tenni nell' anzi citata, colla quale la presente ha molti rapporti, cioè comincerò a soddisfarla pel caso che la retta $DE$ paralella alla $O$ seghi la linea $AVB$ in due punti; indi nel caso individuato che quest' ultima retta o la stessa $O$ sia paralella nella paraboloide all' asse e nell' iperboloide ad uno degli asintoti dell' ortografia $AVB$; in ultimo soddisfarò la medesima proposizione pel caso che ha luogo nella sola iperboloide, vale a dire allorchè la paralella alla $O$ tirata pel centro della $AVB$ attraversi l' angolo compreso dagli asintoti della medesima ortografia; ciò che non accade quando abbiano luogo i due casi precedenti.

#### PRIMO CASO.

Si tiri la corda $DE$ dell' ortografia paralellamente alla $O$, si faccia l' angolo $QDE$ eguale al $\Delta$, determinisi l' ascissa $Dd$ corrispondente al punto dove la retta $DQ$ segherebbe, *lemma quindicesimo*, la periferia ellittica avente $DE$ per uno degli assi, e di cui si conosce l' ordinata corrispondente al punto comune alle $DE$, $VT$; indi si tirino altre corde $HL$, - - paralelle anch' esse alla $O$, e si seghino le loro parti $Hh$, - - rispettivamente proporzionali alle stesse corde $HL$, - -, come $Dd$ lo è alla $DE$, che i punti $h$, - - apparterranno all' ortografia dimandata.

Le sezioni fatte alla superficie dai piani perpendicolari all' ortografico e che passano per le rette $DE$, $HL$, - - saranno altrettante periferie ellittiche e simili fra loro, *lemmi quarto ed ottavo.*

Conducendo pei punti $D$, $H$, - - le paralelle ai raggi di luce, e dai nuovi segamenti di esse colla superficie le perpendicolari al piano ortografico, avransi nei piedi di queste

perpendicolari i punti delle rette $DE$, $HL$, -- comuni all' ortografia dimandata ; e però siccome queste paralelle ai raggi di luce fanno colle $DE$, $HL$, -- degli angoli eguali, e le sezioni ellittiche suddette sono simili, saranno le parti degli assi $DE$, $HL$, -- intercette fra i loro termini $D$, $H$, -- e l' ortografia richiesta rispettivamente proporzionali ai medesimi, *lemma diciassettesimo.*

Ma se la semiperiferia ellittica che ha per asse $DE$ e che rappresenta una delle dette sezioni, col rotare attorno al suo asse $DE$ si adatti al piano ortografico insieme alla paralella ai raggi di luce ed alla perpendicolare alla stessa $DE$, che trovansi amendue nel piano di essa sezione, e si rappresenti questa semiperiferia ellittica colla $DQE$, egli è evidente che la paralella ai raggi di luce cadrà nella $DQ$, e la perpendicolare alla $DE$ nella $Qd$, per cui il punto $d$ della corda $DE$, determinato sopra, sarà quello comune ad essa corda ed all' ortografia in quistione ; adunque il rapporto che debbono avere le parti anzidette delle corde $DE$, $HL$, -- alle corde stesse dovrà essere quello della $Dd$ alla $DE$.

Quindi per essersi fatte le parti $Dd$, $Hh$, -- delle corde $DE$, $HL$, -- rispettivamente proporzionali ad esse corde medesime, i punti $d$, $h$, -- costituiranno veramente l' ortografia dimandata.

Corollario 1. Congiunti i punti $M$, $N$ di mezzo delle corde $HL$, $DE$, si ha il diametro $Pp$ dell' ortografia data, il quale sega la medesima nel punto $P$ comune e di contatto fra questa e l' ortografia richiesta.

Corollario 2. Nell' ellisse (fig. 72) e nell' iperbola (fig. 73) essendo

$$\overline{ML}^2 : \overline{NE}^2 = MP \cdot Mp : PN \cdot Np,$$

e nella parabola (fig. 71)

$$\overline{ML}^2 : \overline{NE}^2 = PM : PN,$$

e per quello che si è dimostrato

$$\overline{ML}^2 : \overline{NE}^2 = \overline{Mh}^2 : \overline{Nd}^2,$$

si avrà per le prime due di queste linee

$$\overline{Mh}^2 : \overline{Nd}^2 = MP \cdot Mp : PN \cdot NP,$$

e per l' altra

$$\overline{Mh}^2 : \overline{Nd}^2 = MP : NP ;$$

vale a dire l' ortografia descritta sopra sarà un' ellisse nell' ellissoide, un' iperbola nell' iperboloide, ed una parabola nella paraboloide, ed avrà coll' ortografia della data superficie comune il diametro $Pp$: proprietà dimostrabili facilmente anche col semplice *lemma tredicesimo.* Questo diametro comune diverrà un asse delle medesime linee quando la tangente in $P$ all' ortografia $AVB$ sarà orizzontale.

Corollario 3. Nell' ellissoide e nell' iperboloide, rappresentando colle $AB$, $f'f$ i diametri delle ortografie $AVB$, $d'Pd$ e conjugati al comune $Pp$, si avrà

$$\overline{CP}^2 : PM \cdot Mp = \overline{CB}^2 : \overline{ML}^2, \quad \overline{CP}^2 : PM \cdot Mp = \overline{Cf}^2 : \overline{Mh}^2, \text{ e però}$$

$$\overline{CB}^2 : \overline{ML}^2 = \overline{Cf}^2 : \overline{Mh}^2, \text{ o sia } CB : ML = Cf : Mh,$$

cioè i semidiametri conjugati $CB$, $Cf$ sono geometricamente proporzionali alle ordinate $ML$, $Mh$ corrispondenti ad una medesima ascissa, siccome era facile a prevedersi.

Così, nominato $P$ il parametro della parabola (fig. 71) $AVB$, e $p$ quello della $d'Pd$, si hanno le equazioni

$$\overline{ML}^2 = P \cdot MP, \quad \overline{Mh}^2 = p \cdot MP,$$

le quali danno

$$\overline{ML}^2 : \overline{Mh}^2 = P : p,$$

cioè i parametri delle parabole $AVB$, $d'Pd$ come i quadrati delle loro ordinate corrispondenti alle medesime ascisse; come ecc.

Osservazione. L'ombra di cui si è parlato qui sopra sarà $Phd$ (fig. 71) ovvero $Ph'd'$, od anche la stessa retta $PN$, secondo che la retta $Dd$ risulterà maggiore o minore, oppure eguale alla metà della $DE$.

## SECONDO CASO.

Primieramente sia $AVB$ (fig. 74) l'ortografia della paraboloide.

Si tirino le rette $DE$, $HL$, -- paralelle alla $O$, o sia alla $VT$ asse della parabola $AVB$, si faccia l'angolo $mVT$ eguale al $\Gamma$, si trovi l'ascissa $Vv$, osservazione del *lemma sedicesimo*, che corrisponde al segamento della $Vm$ colla parabola $Vmn$, seconda sezione avente l'asse anch'essa nella $VT$, il vertice in $V$, e che passa pel punto $n$, a cui suppongo corrispondente un'ordinata conosciuta; indi si seghino $Dd$, $Hh$, -- eguali alla $Vv$, e si avrà nella $dvh$ l'ortografia dimandata.

Se dai punti della paraboloide, dove è incontrata di nuovo dalle paralelle ai raggi di luce che passano per gli $H$, $V$, $D$, --, si tirino le perpendicolari al piano ortografico, i loro piedi saranno punti delle rette $DE$, $VT$, $HL$, -- equidistanti dai $D$, $V$, $H$, --, per essere le sezioni fatte alla medesima superficie dai piani passanti lungo le stesse $DE$, $VT$, $HL$, -- e perpendicolari all'ortografico altrettante parabole eguali fra loro, *lemma sesto*.

Ma i piedi di queste perpendicolari sono gli stessissimi punti dell'ortografia dimandata, e la $Vv$ è evidentemente una delle suddette distanze; adunque $dvh$ sarà l'ortografia medesima.

Osservazione. Essendo le rette $Dd$, $Vv$, $Hh$, -- paralelle ed eguali, la linea $dvh$ sarà una parabola eguale perfettamente alla stessa data $DVH$, e però descrivibile con facilità.

In secondo luogo sia $AVB$ (fig. 75) l'ortografia dell'iperboloide o la sua prima sezione, ed $XY$, $XZ$ siano gli asintoti di essa.

Nell'iperboloide, se la retta $Dm$ sarà paralella ad uno degli asintoti $XZ$, $XY$, per esempio all'$XY$, le sezioni che fanno i piani perpendicolari all'ortografico e che passano lungo le $Hh$, $Dd$, -- paralelle alla $O$, saranno parabole che avranno i vertici nei punti $H$, $D$, -- e gli assi nelle rette $Hh$, $Dd$, --, ed i parametri proporzionali alle $Xa$, $Xb$, --, *lemma quinto*. Ma le distanze fra i punti $H$, $D$, -- a quelli dell'ortografia dimandata che trovansi nelle rette $Hh$, $Dd$, -- sono proporzionali ai parametri delle stesse parabole, *lemma diciannovesimo*; adunque anche alle rette $Xa$, $Xb$, --, *lemma quinto*; e però trovata una delle rette $Hh$, $Dd$, --, *lemma sedicesimo*, si procederà alla determinazione dell'ortografia in quistione, come nel caso analogo della proposizione quarta della seconda parte.

## TERZO CASO.

Se la retta $DE$ (fig. 75) paralella alla $O$ non segherà l'iperbola $AVB$ in due punti, nè sarà paralella ad uno degli asintoti di essa, o sia se la paralella alla $O$ tirata per $X$ centro dell'iperbola attraverserà l'angolo $ZXY$ de' suoi asintoti, le sezioni dell'iperboloide fatte dai piani perpendicolari all'ortografico e condotti lungo le rette $Hh$, $Dd$, -- saranno tutte iperbole simili, *lemma settimo*; e però le ascisse prese dai punti $H$, $D$, -- e nelle rette $Hh$, $Dd$, -- corrispondenti ai segamenti delle stesse iperbole colle paralelle

ai raggi di luce tirate pei punti medesimi $H$; $D$, - - saranno proporzionali ai diametri analoghi delle stesse iperbole, osservazione del *lemma diciassettesimo*: conseguentemente determinata una di queste ascisse, *lemma ventesimo*, avransi tutti i punti dell' iperbola richiesta in un modo affatto simile a quello usato nel caso primo di questa medesima proposizione.

## PROPOSIZIONE XXV.

*Ammesso il dato della proposizione antecedente, trovare l' ortografia dell' ombra portata sulla superficie di second' ordine dalla seconda sezione di essa, cioè dalla sezione principale che è perpendicolare al piano ortografico.*

Sebbene si potrebbe soddisfare la presente proposizione senza distinguere le tre differenti superficie contemplate in essa, come ho fatto nel primo caso dell' antecedente proposizione; nulladimeno, onde procacciarle la maggior chiarezza, la soddisfarò separatamente per ciascuna delle medesime superficie, ed incomincerò

### DALL' ELLISSOIDE.

Sia $VR$ (fig. 76) la seconda sezione dell' ellissoide adattatasi al piano ortografico o della prima sezione $YVCX$ con un quarto di rotazione fatto attorno al suo asse od ortografia $VX$. La linea $VR$ non fa bisogno che sia effettivamente disegnata, come lo debb'essere $YVCX$; giacchè non serve ad altro che a facilitare l' enunciato della regola e la sua dimostrazione.

Si tiri $VC$ paralella alla $O$, si faccia l' angolo $CVP$ eguale al $\Delta$, si trovino le coordinate $Vm$, $mP$ analoghe alle $Dd$, $dQ$ del primo caso della precedente proposizione, conducasi l' orizzontale $mD = mP$, e la verticale $mE$ indefinita, e la $DE$ paralella al diametro $BR$ della seconda sezione avente un termine nel punto $R$ di contatto fra la stessa $VR$, sezione seconda, e la retta $Rv$ sua tangente, che fa colla verticale $Bv$ l' angolo $RvB$ eguale al $\Gamma$, *lemma decimo*; indi uniscasi $EFBY$, e si tirino le $HmG$, $QnN$, - - paralelle alla $FT$ tangente la prima sezione in $F$, e si seghino in $n$, - - tutte, come lo è $GH$ in $m$, che i punti $n$, - -, così determinati, saranno nell' ortografia dimandata.

La seconda sezione, cioè quella che ha l' ortografia nella retta $VBX$, essendo una delle due linee comuni alla superficie involvente ed all' ellissoide, l' altra linea comune a queste superficie, ambedue di second' ordine, sarà piana, come lo è la seconda sezione medesima, *lemma tredicesimo*; e però la linea dell' ombra sarà un' ellisse avente di comune col $VCXY$ il centro $B$, ed il diametro esistente nella comune sezione del piano dell' ombra medesima e dell' ortografico; quindi anche la richiesta ortografia sarà una periferia ellittica, la quale avrà di comune colla $VCXY$ il centro, un diametro e due punti di contatto ai termini di questo medesimo diametro.

Si facciano rotare i due triangoli $DmE$, $BRv$ intorno alle verticali $mE$, $vB$ in guisa che si dispongano di dietro e perpendicolari al piano ortografico: in questa novella posizione i punti $D$ ed $R$ saranno nel piano della linea dell' ombra, le rette $DE$, $RB$ fra loro paralelle; più la $BR$ sarà nella comune intersecazione del medesimo piano dell' ombra

e del piano della seconda sezione. In questa nuova posizione, essendo tanto la retta $BR$, quanto il punto $D$ della sua paralella $DE$ nel piano della linea dell' ombra, il punto $E$ della $DE$ sarà anch' esso nel medesimo piano; e perciò la retta $FEYB$, la quale ha i due punti $B$, $E$ in quest' ultimo piano e nell' ortografico, rappresenterà la loro comune sezione; e pertanto $YBF$ porzione di quest' ultima retta esprimerà il diametro comune alla prima sezione $VCXY$ ed all' ortografia richiesta.

Così, per essere $m$ l' ortografia del punto dell' ellissoide, nel quale cade l' ombra portata dal $V$ della seconda sezione, sarà esso un punto della medesima periferia ellittica dimandata.

Risulta adunque che l' ortografia in quistione debb' essere l' ellisse avente il centro in $B$, un diametro nella $YBF$, i punti di contatto colla $VCXY$ in $F$ ed $Y$, e che deve passare pel punto $m$ ora conosciuto. Ma il paralellismo delle rette $QN$, $HG$, -- colla tangente $FT$ dell' ellisse $VCXY$, e le proporzionalità di esse colle loro parti rispettive $nQ$, $mH$, -- danno le proporzioni geometriche

$$\overline{NQ}^2 : \overline{GH}^2 = YQ \cdot QF : YH \cdot HF,$$

$$\overline{NQ}^2 : \overline{GH}^2 = \overline{nQ}^2 : \overline{mH}^2,$$

da cui si deduce la seguente

$$\overline{nQ}^2 : \overline{mH}^2 = YQ \cdot QF : YH \cdot HF,$$

la quale esprime evidentemente che i punti $n$, $m$, -- sono nella periferia ellittica anzidetta, e per conseguenza nell' ortografia dimandata; ciò che ecc.

Osservazione 1. Si supponga che il triangolo $RvB$ ruoti attorno alla verticale $vB$, come si è detto superiormente, e che con esso ruoti anche la retta $RI$ perpendicolare alla stessa verticale $Bv$; egli è evidente che la nuova situazione della $RI$ sarà la perpendicolare al piano ortografico tirata dal segamento fra la linea dell' ombra ed il piano che ha l' ortografia nella $BV$; quindi il suo piede $I$ sarà il segamento stesso della retta $VX$ e dell' ortografia di cui si parla.

Pertanto, trovato il punto di contatto $R$, *lemma decimo*, fra la retta $Rv$ facente l' angolo $RvB$ eguale al $\Gamma$, e l' ellisse $RV$ di cui si conoscono almeno i due assi; e condotta poscia da questo punto la $RI$ perpendicolare alla verticale $BV$, nel piede di essa si otterrà il segamento della stessa verticale $BV$ e dell' ortografia $YIm$, senza descrivere quest' ultima.

Osservazione 2. Se la porzione dell' ellissoide sarà la sola ottava parte che ha per ortografia il quadrante ellittico $VBS$, e che trovasi di là dal piano della prima sezione, l' ortografia dell' ombra portata sulla medesima superficie da tutti i lati del suo lembo verrà rappresentata dal quadrilatero mistilineo avente per lati la retta $VI$, l' arco ellittico $Im$ descritto poc' anzi, la porzione $Vx$ del dato compreso fra $V$ ed il punto di contatto di $VC$ stesso, e la retta paralella alla $O$, ed il quarto sarà l' arco $xm$ pure ellittico che rappresenta l' ortografia dell' ombra portata dallo stesso $Vx$, e descritto nel primo caso della proposizione precedente; così se i raggi di luce saranno paralelli al piano ortografico, l' ombra cagionata dalla seconda sezione sarà il diametro dell' ellisse $YVCX$, che ha un termine nel punto $C$.

## DELLA PARABOLOIDE ELLITTICA.

Le curve $AVB$, $VR$ (fig. 77) rappresentino per questa superficie delle linee analoghe alle egualmente denominate per la superficie dell' ellissoide.

Conducasi $VC$, e si trovino $Vm$, $mP$, come si è fatto qui sopra; si determini, *lemma undecimo*, $IR$ ordinata del punto di contatto fra la parabola

*VR* e la retta *Rv* sua toccante, che comprende colla *Vt* l'angolo *RvT* eguale al $\Gamma$; si prendano nelle verticali *mQ'*, *VIT* le parti *Q'S*, *TK* eguali rispettivamente alle *mP*, *IR*; si uniscano le *Q'TZ*, *SKZ*, e da *Z* segamento tirisi la *FZ* verticale; indi si tirino le *HmG*, *QN*,-- paralelle alla *tF* tangente in *F* alla *YAX*, e si seghino le loro parti *Qn*,-- che siano alle stesse *QN*,-- geometricamente, come *GH* è alla sua parte *mH* determinata, ed avransi nei segamenti *m*, *n*,-- altrettanti punti dell' ortografia dimandata.

La linea dell' ombra debb' essere una parabola conica che ha i diametri verticali e situata nella paraboloide; la sua ortografia sarà adunque anch' essa una parabola conica avente i diametri verticali, un punto di contatto colla data *AVB*, e comune con questa il diametro che ha il termine in questo medesimo punto di contatto, e situata nella sezione comune del piano dell' ombra medesima e dell' ortografia.

Ma se il triangolo *ZSQ'* col rotare intorno alla *ZQ'* si dispone di dietro e perpendicolarmente all' ortografico, i punti *S*, *K* passano nel piano dell' ombra, per essere $Q'S = mP$, $TK = IR$; adunque il punto *Z*, comune alla *SZ* ed al piano ortografico anche in questa nuova posizione, apparterrà alla comune intersecazione dei due piani suddetti; e però la verticale *FZH* sarà il diametro comune alla parabola *AVB* ed all' ortografia richiesta.

Così, per essere

$$\overline{QN}^2 : QF = \overline{GH}^2 : FH = \text{ecc.}$$

in virtù del paralellismo delle rette *Ft*, *NQ*, *GH*, --, e per costruzione

$$QN : Qn = GH : mH = \text{ecc.},$$

si avrà anco

$$\overline{Qn}^2 : QF = \overline{Hm}^2 : FH = \text{ecc.};$$

ma il punto *m* appartiene evidentemente all' ortografia dimandata, come ortografia del punto nel quale cade l' ombra che porta il *V*; adunque i punti *n*, *m*, --, determinati superiormente, sono veramente nell' ortografia dimandata; come ho asserito.

Corollario. Il punto *I* sarà, come nell' ellissoide, un punto dell' arco parabolico che rappresenta l' ortografia dell' ombra in quistione.

Osservazione. Se i raggi di luce fossero paralelli al piano ortografico, il punto *F* cadrebbe nel *C*, e l' ortografia dimandata sarebbe la retta verticale *CU*; così se la porzione della paraboloide sarà la sola avente l' angolo *BVT* per ortografia, e collocata di dietro alla prima sezione, l' intera ortografia dell' ombra portata dal suo lembo sarà il semplice quadrilatero *VxmI*, che ha il lato *VI* rettilineo, e gli altri tre *Im*, *mx*, *Vx* parabolici, *x* esprimendo il punto di contatto fra la parabola *VxB* e la sua tangente paralella alla *O*, ed *mx* l' ortografia dell' ombra portata dallo stesso arco *Vx*.

### DELL' IPERBOLOIDE A DUE FOGLIE.

Sia *AVB* ( fig. 78 ) l' ortografia dell' iperboloide o sia la sua prima sezione, e la retta verticale *VT* sia al solito quella della seconda sezione o sia la linea che cagiona l' ombra in quistione.

Si trovi il semiasse *CV* dell' iperbola *AVB*, tirinsi le *VL*, *EF*, *GB* paralelle alla *O*, si determini il punto *i* della prima di queste rette in cui

cade l'ortografia dell' ombra portata dal punto $V$, *lemmi quindicesimo, sedicesimo e ventesimo*, e l'$m$ di un' altra qualunque, e nel quale cade l'ortografia dell' ombra portata da quello della seconda sezione, il quale ha l'ortografia in $c$, corollario primo del *lemma vigesimosesto*; congiungasi $iC$, e dai segamenti $a, b$, -- del prolungamento di questa retta colle $EF$, $GB$, -- si tirino le $ar$, $bs$, -- tangenti il circolo $irs$, -- descritto col centro $C$ alla distanza $Ci$: fatto ciò, trovinsi $bn$, -- che siano alle corrispondenti tangenti $bs$, -- geometricamente, come l'$am$ è alla tangente $ar$, e saranno $n$, -- altrettanti punti dell' ortografia dimandata.

Onde facilitare la dimostrazione di questa proposizione suppongo disegnata l' iperbola $A'B'$ opposta della $AB$, cioè l' ortografia dell' altra foglia dell' iperboloide, di cui intendo di parlare; e faccio osservare che le sezioni principali delle due foglie di queste superficie, le quali hanno le ortografie nelle verticali $VT$, $T'V'$, sono anch' esse due iperbole opposte aventi il centro nel punto $C$, siccome è facile a concepirsi.

Immagino la superficie cilindrica che ha per direttrice queste ultime due iperbole opposte e la retta generatrice paralella ai raggi di luce: questa superficie di second' ordine avendo di comune coll' iperboloide le medesime due iperbole opposte anzidette, le intersecherà nuovamente in una linea piana anch' essa, *lemma tredicesimo*, e propriamente in due iperbole esse pure fra loro opposte, le quali avranno il centro necessariamente in $C$.

Ora egli è evidente che la superficie cilindrica a due foglie, che ho qui immaginato, è in questo caso la stessissima involvente; adunque l'ombra sarà una delle ultime iperbole nominate; e conseguentemente la sua ortografia o sia la dimandata risulterà essa pure un' iperbola conica avente il centro in $C$; ma l' ortografia dimandata deve passare pei due punti $i$ ed $m$, ed avere la $VL$ tangente; quindi sarà essa quell' iperbola di cui $Ci$ esprime un diametro, ed $am$ l' ordinata corrispondente all' ascissa $Ca$.

Essendo

$$\overline{ar}^2 = ia\,(aC + Ci),\ \overline{bs}^2 = ib\,(bC + Ci),\ --,\ \text{e per l' iperbola}$$
$$ia\,(aC + Ci) : \overline{am}^2 = ib\,(ib + Ci) : y^2;$$

$y$ indicando la sua ordinata corrispondente all' ascissa $bC$, sarà

$$\overline{ar}^2 : \overline{am}^2 = \overline{bs}^2 : y^2,\ \text{o sia}\ ar : am = bs : y;$$

e però $y$ eguale alla $bn$, vale a dire il punto $x$ appartiene all' iperbola che rappresenta la richiesta ortografia; ciò che ecc.

Osservazione 1. L' ortografia dell' ombra di cui si parla sarà la stessa retta $ib$ che passa pel punto $C$ e per l' $i$ determinato come sopra, quando i raggi di luce saranno paralelli al piano ortografico.

Osservazione 2. Dal punto $C$ siano tirate tre rette fra loro perpendicolari, cioè la verticale $CV$, l' orizzontale $CO$, e la perpendicolare a queste due e cadente di là dal piano della prima sezione; ed a queste rette prese per assi siano riferite le coordinate $z, y, x$ di un punto qualunque dell' iperboloide, e si avrà per equazione di questa superficie la seguente

$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2;$$

$a$, $b$, $c$ rappresentano i semiassi della medesima superficie paralelli rispettivamente alle coordinate $x$, $y$, $z$.

Così denominate $y'$, $z'$ le coordinate di un punto qualunque della seconda sezione, sarà $c^2y'^2 = b^2z'^2 - b^2c^2$ la sua equazione. Similmente, nominate $m$, $n$ le tangenti degli angoli che fanno le $I$, $O$ colla retta comune ai piani ortografico ed icnografico, e $t$, $s$, $u$ le coordinate della paralella ai raggi di luce che passa pel punto corrispondente alle $y'$, $z'$ ed analoghe alle $x$, $y$, $z$, le due equazioni $s = mt + y'$, $u = nt + z'$ rappresenteranno la retta medesima.

Ponendo nell' equazione $c^2y'^2 = b^2z'^2 - b^2c^2$, in vece delle coordinate $y'$, $z'$, i loro valori desunti dalle due equazioni $s = mt + y'$, $u = nt + z'$, si ottiene la

$$c^2(s - mt)^2 = b^2\{(u - nt)^2 - c^2\}, \text{ o sia}$$

$$b^2u^2 - c^2s^2 + (b^2n^2 - c^2m^2)t^2 - 2nb^2tu + 2mc^2ts - b^2c^2 = 0,$$

la quale esprime evidentemente la superficie involvente, per essere $s = mt + y'$, $u = nt + z'$ le equazioni di una sua retta generatrice, e la $c^2y'^2 = b^2z'^2 - b^2c^2$ quella di una sua direttrice.

Essendo

$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2$$

l' equazione dell' iperboloide, e

$$b^2u^2 - c^2s^2 + (b^2n^2 - c^2m^2)t^2 - 2nb^2tu + 2mc^2ts - b^2c^2 = 0$$

quella della involvente, le equazioni, le quali rappresenteranno le linee comuni alle medesime due superficie, saranno

$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 = 0,$$

$$b^2z^2 - c^2s^2 + (b^2n^2 - c^2m^2)t^2 - 2nb^2tu + 2mc^2ts - b^2c^2 = 0:$$

$x$, $y$, $z$ esprimono in esse le coordinate di un punto qualunque di queste linee, supposte riferite anch' esse ai tre assi ortogonali suddetti.

Ma moltiplicando i membri della seconda di queste equazioni per $a^2$, e sottraendo la risultante dalla prima, si ottiene

$$(a^2c^2m^2 - a^2b^2n^2 - b^2c^2)x^2 + 2a^2b^2nxz - 2a^2c^2mxy = 0, \text{ cioè}$$

$$\text{od } x = 0, \text{ ovvero } (a^2c^2m^2 - a^2b^2n^2 - b^2c^2)x + 2a^2b^2nz - 2a^2c^2my = 0;$$

adunque una delle due intersecazioni delle dette superficie sarà espressa dalle equazioni

$$x = 0, \; a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 - a^2b^2c^2 = 0,$$

e l' altra dalle seguenti

$$(a^2c^2m^2 - a^2b^2n^2 - b^2c^2)x + 2a^2b^2nz - 2a^2c^2my = 0,$$

$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 - a^2b^2c^2 = 0.$$

La prima di queste due linee avendo per una delle sue equazioni la $x = 0$, sarà la seconda sezione; e però l' altra, cioè quella espressa dalle ultime due equazioni, sarà la linea, secondo la quale cade l' ombra di cui si è parlato sopra.

Supponendo $y = 0$ nelle due equazioni della linea dell' ombra, ed eliminando dalla risultante la $z$, si ottiene la sola

$$\{(a^2b^2n^2 + b^2c^2 - a^2c^2m^2)^2 - 4a^2b^4c^2n^2\}x^2 = 4a^4b^4c^2n^2,$$

la quale dà

$$x = 2a^2b^2cn : \sqrt{\{(a^2b^2n^2 + b^2c^2 - a^2c^2m^2)^2 - 4a^2b^4c^2n^2\}}$$

per ascissa corrispondente al punto dove la traccia ortografica del piano della linea dell' ombra sega l' ortografia data $AVB$, o sia l' ascissa che corrisponde al punto di contatto fra quest' ultima ortografia e la dimandata.

Questo valore della $x$ sarà reale tutte le volte che $(a^2b^2n^2+b^2c^2-a^2c^2m^2)^2$ risulterà maggiore di $4b^4a^2c^2n^2$, o sia $a^2b^2n^2+b^2c^2-a^2c^2m^2$ di $2ab^2cn$, ovvero $a^2b^2n^2-2ab^2cn+b^2c^2$ di $a^2c^2m^2$; cioè $\pm b(an-c)$ maggiore di $acm$, oppure $\pm\frac{an-c}{am}$ maggiore di $\frac{c}{b}$: si prenderà il segno + quando $an$ sarà maggiore di $c$, ed il — nel caso di $an$ minore del medesimo $c$. Lo stesso valore della $x$ risulterà infinito nel caso di $\pm\frac{an-c}{am}$ eguale a $\frac{c}{b}$, ed immaginario quando sarà $\pm\frac{an-c}{am}$ assolutamente minore di $\frac{c}{b}$. Adunque l'ortografia dimandata avrà un punto di contatto colla $AVB$ allorchè sarà $\pm\frac{an-c}{am}$ maggiore di $\frac{c}{b}$, un asintoto comune colla medesima quando risulteranno le frazioni medesime eguali; e cadrà interamente dentro della stessa iperbola, e senza punto toccarla, nel caso di $\pm\frac{an-c}{am}$ minore di $\frac{c}{b}$.

Per decidere colla riga e col compasso quali di questi tre casi avrà luogo, senza descrivere l' ortografia dimandata, si farà (fig. 79) $AB=a$, e gli angoli $BAC$, $BAD$ eguali rispettivamente a quelli che hanno per tangenti $n$, $m$; indi troverassi la quarta proporzionale geometrica dopo le linee $c$, $b$, $\pm(BC-c)$; e risultando questa minore, eguale o maggiore della $BD$, avranno correlativamente luogo i tre casi suddetti; vale a dire l' ortografia *nmi* toccherà in un punto la data $AVB$, quando la quarta proporzionale risulterà maggiore della $BD$; queste ortografie avranno un asintoto comune, nel caso che questa risulti eguale alla $BD$: in terzo ed ultimo luogo la *nmi* cadrà interamente dentro della $AVB$, allorchè la detta quarta proporzionale sarà minore della medesima retta conosciuta $BD$.

Imperciocchè, se $x$ quarta proporzionale è maggiore di $BD$, risulta $\pm\frac{BC-c}{BD}$ maggiore di $\pm\frac{BC-c}{x}$, e però $\pm\frac{BC-c}{BD}$ o sia $\pm\frac{an-c}{am}$ maggiore di $\frac{c}{b}$, per essere $\pm\frac{BC-c}{x}=\frac{c}{b}$. Così, essendo $BD$ eguale oppure minore della $x$, si ha nel primo caso $\pm\frac{BC-c}{BD}$ eguale a $\frac{c}{b}$, e nel secondo $\pm\frac{BC-c}{BD}$ minore della medesima frazione $\frac{c}{b}$; quindi ecc.

Corollario. Nella ipotesi che la luce sia diretta, come si suppone comunemente, si ha $m=n=1$; e però l' ortografia richiesta toccherà in un punto la curva $AVB$, quando la quarta proporzionale geometrica dopo le rette $c$, $b$, $\pm(a-c)$ risulterà maggiore dell' $a$; avrà un asintoto comune allorchè questa quarta proporzionale eguaglierà la stessa $a$; in fine cadrà interamente dentro la stessa $AVB$, e senza toccarla, risultando la medesima quarta proporzionale geometrica maggiore del medesimo semiasse $a$ parallelo alle ordinate $x$.

## PROPOSIZIONE XXVI.

*Una delle tre superficie di second' ordine essendo disposta e conosciuta, come nella proposizione quarta della seconda parte, determinare l'ortografia dell' ombra che vien portata su di essa dal lembo di una sua sezione od apertura orizzontale di cui si conosce l' ortografia.*

Nella soluzione di questa proposizione distinguo i tre casi medesimi che distinsi nella proposizione qui citata, ed incomincio dal primo dei medesimi, e lo tratto con tutta l' estensione che si può desiderare.

### PRIMO CASO.

La linea $AVB$ ( fig. 80 ) di second' ordine, avente $VT$ per asse verticale, rappresenti la prima sezione della superficie di second' ordine, e la sua corda orizzontale $CD$ l' ortografia dell' apertura della medesima superficie.

Pel punto $K$ di mezzo della corda $CD$ e per un suo termine $C$ si tirino le altre corde $EF$, $CG$ paralelle alla $O$, e su di esse come diametri si descrivano i circoli $QhF$, $CING$, e si tiri $QKH$ perpendicolare all' $EF$, ed il raggio $MI$ alla $CG$, e si facciano le $KS$, $KU$ eguali all' ordinata della seconda sezione corrispondente alla sua ascissa $VK$, e la $MZ = Mi$ eguale all' altro semiasse della sezione ellittica fatta alla superficie dal piano perpendicolare all' ortografico e che passa per $CG$: fatto ciò, costruiscansi gli angoli $SLE$, $UXE$, $MCP$ eguali al $\Delta$, congiungansi le $QLq$, $XHh$, $PZ$, e tirisi la $CN$ paralella alla $PZ$; e finalmente conducansi le $hua$, $qsb$, $Nc$ perpendicolari alle $EF$, $CG$, ed uniscasi il punto $n$ di mezzo dell' $ab$ al punto $c$, e si otterranno nelle due rette $na$, $nc$ due semidiametri conjugati della periferia ellittica rappresentante l' ortografia dimandata; e però sarà essa descrivibile agevolmente, *lemma quattordicesimo.*

La superficie involvente è evidentemente di second' ordine, la linea dell' ombra è una di quelle comuni a questa superficie ed alla data, le quali hanno per altra linea comune il contorno dell' apertura medesima; adunque la linea dell' ombra sarà anch' essa piana, *lemma tredicesimo*; più sarà un' ellisse avente il centro nell' asse della superficie involvente.

Essendo la linea dell' ombra un' ellisse situata nella superficie cilindrica involvente che ha per base l' apertura, l' ortografia dimandata sarà anch' essa una periferia ellittica, la quale avrà i termini di ciascun diametro nelle ortografie delle ombre portate sulla superficie di second' ordine dai termini di un diametro dell' apertura, e per diametri conjugati quelli che congiungeranno le ortografie delle ombre portate dai termini di due diametri conjugati dell' apertura medesima, e ciò per quello che si vede nell' osservazione quinta della proposizione tredicesima.

Così, per la costruzione, i punti $S$, $U$ saranno nell' ellisse che rappresenta la sezione fatta alla superficie di second' ordine dal piano che passa per la $EF$ ed è perpendicolare all' ortografico, supposto però che siasi adattato all' ortografico medesimo, corollario del *lemma diciottesimo*; come $p$ sarà nell' ellisse dell' analoga sezione che passa per $CG$, *lemma quindicesimo.*

Ora suppongo al solito che il semicerchio *CIG* insieme alle rette *CN*, *cN* col girare attorno a *CG* si disponga al di là della prima sezione e perpendicolare alla medesima: in questa situazione egli è evidente che la retta *CPp* rappresenterà la paralella ai raggi di luce tirata pel punto *C*, e la *pc* la perpendicolare tirata al piano ortografico dal punto della superficie di second' ordine, dove cade l' ombra portata da *C* stesso; quindi *c* piede di quest' ultima perpendicolare sarà l' ortografia dell' ombra portata dal medesimo punto *C* sulla stessa superficie di second' ordine.

Similmente, facendo fare un quarto di rotazione intorno ad *EF* tanto al cerchio *EQH*, quanto alle rette *SU*, *Ss*, *Uu*, *ua*, *sb*, e dalla banda per cui risulti *S* anteriore al piano della prima sezione, la retta *SU* diverrà quell' asse dell' apertura, il quale è perpendicolare al piano ortografico, le rette *Ss*, *Uu* le paralelle ai raggi di luce tirate pei termini di quest' asse, e le *ua*, *sb* perpendicolari al piano ortografico condotte dai punti della superficie di second' ordine, nei quali cadono le ombre che portano i termini dell' asse medesimo dell' apertura; quindi i punti *a*, *b*, piedi di queste perpendicolari, rappresenteranno le ortografie delle ombre portate sulla superficie di second' ordine dai termini dell' asse dell' apertura, il quale trovasi perpendicolare al piano ortografico.

Ma i due assi di un' ellisse sono anche due suoi diametri conjugati; adunque i punti *a* e *b* rappresentando le ortografie delle ombre portate dai termini di uno degli assi della periferia ellittica dell' apertura, e *c* l' ortografia di quella portata da un termine dell' altro asse della medesima, le rette *an*, *cn* saranno due semidiametri conjugati dell' ortografia dimandata, per quello che ho detto poc' anzi relativamente alle ortografie delle ombre portate dai termini dei diametri conjugati dell' apertura in quistione; ciò che dovevasi dimostrare.

Osservazione 1. Se la superficie di second' ordine fosse anche di rotazione, e la *VT* il suo asse, le rette *SK*, *KU* sarebbero eguali alle *CK*, e la *MZ* media proporzionale geometrica fra le parti *sM*, *Mt* della corda orizzontale *sMt*.

Osservazione 2. Le rette *Cc*, *Df* fra loro paralelle toccheranno la periferia ellittica nei termini del diametro *cf* di essa, che sarà una corda dell' ortografia di cui si è parlato nella proposizione vigesimaquarta.

## SECONDO CASO.

In questo caso particolarissimo, che ha luogo, quando le rette *EF*, *CG* siano paralelle, per la paraboloide all' asse, e per l' iperboloide ad uno degli asintoti dell' ortografia *AVB* per trovare l' ortografia in quistione; per la paraboloide si segheranno *KL*, *KG* (fig. 81) eguali all' ordinata della seconda sezione e corrispondente alla sua ascissa *VK*, si farà l' angolo *KGH* eguale al Δ, tirerassi *LM* paralella al lato *GH*, e si troveranno le ascisse *VN*, *VF*, che corrispondono ai punti *M*, *H*, ove le rette *LM*, *GH* segano la parabola che ha il vertice in *V*, l' asse nella *VT*, e che passa pei punti *L*, *G*, *lemma sedicesimo*; indi si condurranno dal punto *P* di mezzo della *FN* le *PR*, *PQ* perpendicolari alla medesima *FN* ed ambedue eguali alla *KD*; e nelle rette *QR*, *FN* avransi i due assi della periferia ellittica rappresentante l' ortografia dimandata; e però l' ortografia stessa, *lemma quattordicesimo*: e per l' iperboloide si condurranno le rette *KU*, *KS* (fig. 82) perpendicolari alla *EF* ed eguali a quell' ordinata della seconda sezione che corrisponde all' ascissa *VK*; si farà l' angolo *KSs* eguale al Δ, si tirerà la

*Uu* paralella al lato *Ss*, e troveransi le ascisse *Ea*, *Eb* corrispondenti ai segamenti *u*, *s* delle rette *Uu*, *Ss* colla parabola che ha il vertice in *E*, l'asse nella *EF*, e che passa pei punti *U*, *S*, *lemma sedicesimo*; indi costruito l'angolo *GCp* eguale anch'esso al $\Delta$, si troverà, col *lemma* anzi citato, l'ascissa *Cc* corrispondente al punto dove la retta *Cp* incontra nuovamente la parabola che rappresenta la sezione fatta all'iperboloide dal piano perpendicolare all'ortografico e condotto lungo la *CG*, e si avranno nella *aP* metà di *ab*, e nella *cP* due semidiametri conjugati dell'ortografia dimandata; quindi l'ortografia stessa, *lemma quattordicesimo.*

### TERZO CASO.

Se le rette *EF*, *CG* (fig. 82) paralelle alla *O* non incontreranno nuovamente la sezione prima, e non saranno paralelle agli asintoti della medesima, che sono i due casi già contemplati qui sopra, le sezioni fatte all'iperboloide dai piani perpendicolari all'ortografico e condotti lungo le rette medesime *EF*, *CG* saranno iperbole simili, *lemma settimo*; e però sostituendo queste iperbole alle due parabole corrispondenti del caso antecedente, e poscia determinando i punti *a*, *b*, *c* col *lemma ventiquattresimo*, si avranno, come sopra, nelle rette *aP*, *cP* due semidiametri conjugati dell'ellisse, ortografia richiesta, e per conseguenza l'ellisse medesima, *lemma quattordicesimo.*

Osservazione. Ommetto la dimostrazione delle regole esposte in questi ultimi casi, perchè sarebbero vere ripetizioni di quelle del primo, ed in vece faccio riflettere che sì la paraboloide che l'iperboloide possono essere tutte in ombra o tutte in luce, come è facile a comprendersi non solo la possibilità, ma anche in quali casi possa ciò avvenire.

## PROPOSIZIONE XXVII.

*Di una superficie di second' ordine avente verticale l'asse comune alle due sezioni principali, conoscendosi l'ortografia sì di essa che di una sua apertura piana qualunque, non che la posizione e grandezza dei due assi di una individuata sezione orizzontale, trovare l'ortografia dell' ombra portata dal lembo di questa apertura sulla superficie medesima.*

Al solito sia *AVB* la prima sezione (fig. 83).

Se si volesse soddisfare la presente proposizione seguendo l'ordine stesso tenuto nelle tre precedenti, per evitare la confusione si dovrebbero distinguere almeno nove casi, dai quali nè risulterebbero nove regole differenti necessarie per determinare in tutti i casi l'ortografia in quistione: pertanto, onde risparmiare ai disegnatori una così grande complicazione, in questa occasione sacrifico l'uniformità di metodo, soddisfacendo la proposizione in quest' altro modo, da cui emerge una regola sola, per avere in tutti i casi l'ortografia dell' ombra in quistione, la qual regola riunisce in sè ad una semplicità maggiore di quasi tutte le nove anzidette una mirabile eleganza.

Si tirino le $vx$, $gt$, $ns$ paralelle alla $O$, e delle quali la prima sia tangente l'ortografia $avb$ e le altre due seganti, trovinsi le ortografie $x$, $y$, $z$, $s$, $t$ delle ombre portate sulla superficie di second' ordine dai punti del contorno dell' apertura che hanno per ortografie $n$, $g$, $v$, $h$, $p$, corollario del *lemma vigesimosesto*; indi si descriva la linea di second' ordine, *lemma vigesimoquinto*, che passa pei cinque punti $x$, $y$, $z$, $s$, $t$, e sarà questa evidentissimamente l'ortografia dimandata, qualunque sia la superficie, la sua apertura e la direzione dei raggi di luce.

Osservazione 1. Se la linea $avb$ sarà una parabola, la retta $xc$ che unisce il punto $x$ di contatto con quello di mezzo di una delle corde $yt$, $zs$ rappresenterà un diametro della linea $zxs$; e se sarà $avb$ un' ellisse, facendo passare la $ns$ pel suo centro, e congiungendo $c$ punto di mezzo della $zs$ al punto $x$, avransi nelle rette $cs$, $cx$ due semidiametri conjugati dell' ellisse rappresentante l' ortografia dimandata; quindi in entrambi questi casi si potrà descrivere l' ortografia medesima senza determinare i punti $y$, $t$.

Osservazione 2. Se l' apertura della superficie di second' ordine non sarà piana, ma qualsivoglia, anco non soggetta a legge conosciuta o definita, si descriverà l' ortografia dell' ombra cagionata dal lembo di essa, determinando tutt' i suoi punti, come si sono trovati superiormente i cinque $s$, $t$, $x$, $y$, $z$.

Osservazione 3. Dovrei qui esporre le semplificazioni a cui vanno soggette le regole anzi esposte, quando la superficie di second' ordine sia di rotazione coll' asse verticale o perpendicolare al piano ortografico, e che l' apertura sia un paralello; ma siccome dovrò tornare su questo soggetto, così per ora mi limiterò all' esposizione della seguente proposizione, la quale occupa, se non m' inganno, vantaggiosamente il suo posto.

## PROPOSIZIONE XXVIII.

*Della paraboloide di rotazione che ha l'asse perpendicolare al piano ortografico, conoscendosi l' altezza ed il paralello che rappresenta l' apertura, trovare l' ortografia dell' ombra portata dalla periferia di quest' apertura sulla medesima superficie, o sia il contorno dell' ombra che accade sulla stessa superficie, nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.*

Sia $D$ il centro del cerchio $ABC$ (fig. 84) che rappresenta l' apertura, ed $n$ l' altezza della paraboloide o sia la distanza fra $D$ ed il vertice della medesima.

Si faccia l' orizzontale $DF$ doppia della $n$, uniscasi $F$ al termine inferiore del raggio verticale $DC$, si tiri $CE$ perpendicolare alla $CF$, $EH$ verticale ed eguale alla $DE$, e si descriva col centro $H$ e col raggio eguale alla $CD$ il cerchio $BGAM$, e sarà $BGA$ l' ortografia dimandata.

Nominando $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ le coordinate rettangole della paraboloide riferita alle $DF$, $DC$ ed alla orizzontale tirata per $D$ di là del piano della sezione $ABC$, e $p$ il parametro della parabola che la genera, rotando intorno l' asse delle $y$, si ha

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = p\,(n - \dot{y})$$

per equazione della medesima paraboloide; così, denominate $x_{,}$, $z_{,}$ le coordinate analoghe della periferia $ABC$, si ha per equazione

$$x_{,}^2 + y_{,}^2 = \overline{CD}^2 = pn\,;$$

e chiamando $x', y', z'$ le coordinate della paralella ai raggi di luce che passa pel punto a cui corrispondono le coordinate $x_{,}, z_{,}$, si ottengono le seguenti

$$y' = x' - x_{,},\ z' - z_{,} = y'$$

per equazioni di essa retta.

Si ponga nell' equazione $x_{,}^2 + y_{,}^2 = pn$,
in vece delle $x_{,}, z_{,}$, i loro valori che danno le due della paralella ai raggi di luce, e si avrà

$$(x' - y')^2 + (z' - y')^2 = np,$$

$$\text{o sia } x'^2 + z'^2 + 2y'^2 - 2x'y' - 2y'z' = np$$

per equazione dell' attuale superficie involvente, $x', y', z'$ esprimendo qui le sue coordinate; e però le seguenti

$$x^2 + z^2\ 2y^2 - 2xy - 2yz = np',\ x^2 + z^2 = np - py$$

rappresenteranno le linee comuni alla paraboloide ed all' involvente stessa, $x, y, z$ esprimendo le coordinate analoghe di un punto qualunque di queste linee.

Sostituendo nella prima di queste due equazioni, in luogo di $x^2 + z^2$, il suo valore cavato dalla seconda, si ottiene

$$np - py + 2y^2 - 2xy - 2zy = np;$$

$$\text{cioè od } y = 0,\ \text{oppure } y - z - x = \frac{1}{2}p;$$

quindi le equazioni della periferia $ABC$ e della linea dell' ombra portata, le quali sono le due linee comuni alla paraboloide ed alla involvente, saranno, per la prima

$$y = 0,\ x^2 + z^2 = pn - py,$$

$$\text{ovvero } y = 0,\ \text{ed } x^2 + z^2 = pn,$$

e per l' altra, cioè di quella del contorno dell' ombra, le seguenti

$$y - z - x = \frac{1}{2}p,\ x^2 + z^2 = np - py.$$

Ora eliminando $y$ dalle equazioni del contorno dell' ombra, cioè da queste ultime due, si ha

$$x^2 + z^2 = np - px - pz - \frac{1}{2}p^2$$

per equazione evidentemente dell' ortografia dimandata. Ma quest' equazione equivale alla

$$\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}p\right)^2 = np,$$

la quale esprime la periferia di un cerchio, il cui raggio è eguale a $\sqrt{np}$ o sia alla $CD$, ed al cui centro corrispondono le coordinate $-\frac{1}{2}p, -\frac{1}{2}p$; adunque, per essere

$$DE = EH = \frac{\overline{CD}^2}{DF} = \frac{np}{2n} = \frac{1}{2}p,$$

cioè al semiparametro della parabola generatrice, sarà $BCA$ l' ortografia dimandata; come ho dichiarato.

---

# DE' CONTORNI

## DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE DI ROTAZIONE.

### PROPOSIZIONE XXIX.

*Data l' ortografia di una superficie di rotazione che ha l' asse verticale, trovare quella dell' ombra portata su di essa dal lembo del suo spaccato ordinario.*

Sia $MVL$ lo spaccato (fig. 85) della superficie, e $VB$ il suo asse, e sia $ML$ la solita retta orizzontale comune ai piani ortografico ed icnografico.

Si descriva $MCL$ traccia icnografica della superficie involvente, corollario primo del *lemma primo*, si tiri $BE$ paralella alla $I$, si faccia l' angolo $DBL$ eguale al dato $BCa$ della figura prima; indi conducasi l'orizzontale $GH$, la verticale $PQ$, descrivasi l' archetto $C$ col centro $Q$ ed il raggio eguale alla $GH$, a questa si tiri la perpendicolare $AC$, si prenda $GN = PA$, e sarà $N$ un punto dell' ortografia dimandata.

Sia condotta la retta $QT$ paralella alla $ML$.

Il piano orizzontale, che passa per la retta $GH$, interseca la superficie di rotazione nella periferia orizzontale che ha il centro in $G$ ed il raggio $GH$, e taglia la superficie involvente in una linea eguale perfettamente alla $MCL$; e queste due linee si segano in un punto posteriore al piano $MVL$, il quale si trova nella linea dell' ombra di cui si parla; e però se da questo punto si tirerà la perpendicolare al piano $MVL$, nel piede di essa si avrà quel punto della $GH$ appartenente anche all' ortografia dimandata.

Si supponga che la traccia $MCL$ insieme alle rette $BQ$, $QC$, $CT$, $QT$, rotando intorno alla $ML$, si disponga orizzontale al di là dal piano $MVL$, e che dalla nuova posizione in cui passano i punti $Q$ e $C$ siano tirate due rette paralelle ai raggi di luce sino al piano orizzontale della $GH$. Queste ultime due rette essendo paralelle ed intercette fra due piani paralelli, saranno anche eguali; e però la retta che unisce i loro termini superiori sarà eguale e paralella alla $CQ$. Ma i termini superiori delle medesime due rette paralelle condotte dalle nuove posizioni dei punti $Q$, $C$ cadono l'uno in $G$, e l' altro nella intersecazione della superficie involvente e del piano orizzontale anzidetto; adunque questo punto d' intersecazione avente dal punto $G$ una distanza eguale alla $QC$ o sia alla $GH$ sarà anche nella periferia orizzontale avente il centro in $G$ ed il raggio $GH$.

Concludesi pertanto che la retta che unisce il punto $G$ al segamento delle linee, le quali rappresentano le intersecazioni fatte dal piano orizzontale della $GH$ alla superficie involvente ed a quella di rotazione, concludesi, dico, che questa retta è eguale e paralella a quella che congiunge le novelle posizioni dei punti $Q$ e $C$.

Ora se dal segamento anzidetto, il quale appartiene evidentemente alla linea dell' ombra portata, si tiri la perpendicolare al piano ortografico o sia alla retta $GH$, nel piede di questa perpendicolare cadrà il punto dell' ortografia dimandata che trovasi nella retta $GH$ medesima. Ma il triangolo costituito da questa perpendicolare, dalla porzione della $GH$ intercetta fra il suo piede ed il punto $G$, e quella retta che congiunge $G$ al medesimo segamento, ha tutti i lati paralelli a quelli del $CQT$, e l' ultimo anche eguale al $QC$; dunque il suo lato, che cade nella $GH$, il quale rappresenta la distanza tra $G$ ed il punto dell' ortografia in quistione cadente nell' orizzontale $GH$, sarà anch' esso eguale

alla $QT$ o sia $PA$; e conseguentemente, essendosi segata $GN=PA$, il punto $N$ apparterrà all' ortografia dimandata; ciò che ecc.

Corollario. Tirando la perpendicolare alla $ML$ dal punto $y$, comune alla traccia $MyL$ ed all' arco circolare $y$ descritto col centro $B$, ed il raggio $BL$, avrassi nel piede di essa il punto $x$, dove l' ortografia $nNx$ sega la retta $ML$; e conducendo la tangente all' ortografia data $MVL$ che sia paralella alla $O$, nel punto di contatto si avrà il punto comune alla stessa $MVL$ ed all' ortografia dimandata, il quale sarà anche un loro punto di contatto.

Osservazione 1. Se dell' ortografia in quistione si vorrà la sola porzione $nNx$, della traccia $MCL$ basterà descrivere la parte avente i termini l' uno in $y$, e l' altro nel punto in cui cadrebbe l' ombra portata dall' $n$, le rimanenti parti di essa traccia risultando inutili.

Pertanto nella descrizione della traccia - - $yC$ - - converrà trovare primieramente il punto nel quale cadrebbe l' ombra portata dallo stesso punto $n$, indi i punti di essa traccia antecedenti a questo, e si continuerà sino all' $y$ comune alla periferia circolare che ha il centro in $B$ ed il raggio eguale a $BL$; giacchè in tal guisa si risparmierà di descrivere le parti della traccia medesima che sono inutili a questo proposito.

Osservazione 2. Se i raggi di luce avranno l' ordinaria direzione, i due angoli $EBL$, $DBL$ saranno ambi semiretti, e però le rette $BD$, $BE$ coincideranno, ed il punto $Q$ cadrà in $P$; quindi fatto l' angolo $DBL$ semiretto, descritto l' archetto $C$ col centro $P$ ed il raggio $GH$, e poscia, come sopra, tirata $CA$ perpendicolare alla stessa $GH$, e segata $GN=PA$, avrassi immediatamente il punto $N$, che appartiene all' ortografia richiesta.

Osservazione 3. Se il piano dello spaccato non passerà per l' asse di rotazione della superficie, ma sarà paralello al medesimo ed al piano ortografico: supposta $ML$ ( fig. 86 ) la retta comune ai due soliti piani coordinati, $MBL$ l' ortografia dello spaccato della superficie, $BD$ quella dell' asse di rotazione, ed $E$ l' icnografia del medesimo asse; per avere l' ortografia dell' ombra portata sulla superficie di rotazione, delineata la traccia $MH$ icnografia della superficie involvente, corollario primo del *lemma primo*, si condurrà $EG$ paralella alla $I$, e si farà l' angolo $FDL$ eguale al $BCa$, della figura prima; indi, condotta l' orizzontale $KN$, tireransi le verticali $FG$, $NP$, si descriverà l' archetto $H$ col centro $G$ e raggio $EP$, calerassi la $HC$ perpendicolare alla $KN$, e segata $KA=FC$, sarà $A$ evidentemente un punto dell' ortografia dimandata.

Se i raggi di luce avranno la direzione ammessa nell' antecedente osservazione, la figura $DFGE$ sarà paralellogrammica, e però $Em=Gn$; quindi prendendo $nG$ eguale ad $Em$, si avrà immediatamente il centro $G$, senza condurre nè la $DF$, nè la verticale $GF$.

Le dimostrazioni di queste regole sono interamente simili a quelle esposte superiormente per la proposizione proposta.

## PROPOSIZIONE XXX.

*Conoscendosi l' ortografia di una superficie di rotazione avente l' asse orizzontale e paralello al piano ortografico, trovare quella dell' estremo dell' ombra che porta il suo spaccato ordinario su di essa.*

Sia *ML* ( fig. 87 ) l' asse di rotazione della superficie, ed *MFL* lo spaccato ordinario.

Descritta la linea *MoO*, *lemma vigesimosettimo*, nella verticale *HO*, si prenda *OC* eguale alla *DF*, si descriva col centro *C* e col raggio *CO* l' archetto *I*, tirisi *IA* perpendicolare alla *OH*, e si prenda $FS = AO$, oppure $SD = AC$, e sarà *S* quel punto dell' ortografia dimandata, il quale cade nella verticale *DF*.

Il piano che passa pel punto *D* perpendicolarmente alla retta *ML* sega la superficie di rotazione nella periferia del cerchio verticale che ha il centro in *D* ed il raggio eguale alla *DF*, e sega l' involvente in una linea eguale perfettamente alla stessa *MoO*, *lemma vigesimosettimo*: queste due linee si tagliano in un punto comune al contorno dell' ombra di cui si parla; e però se da questo loro segamento si condurrà la perpendicolare al piano *MFL* o sia alla retta *DF*, nel piede di questa perpendicolare avrassi quel punto della stessa *DF* appartenente anche all' ortografia dimandata.

Ma se il piano *MGOF* colle rette *IA*, *CO*, rotando attorno alla *MG*, si dispone anteriormente al piano *MFL* in modo che risulti perpendicolare alla *ML*, i punti *O* e *C* trasferisconsi negl' incontri di esso piano colle paralelle ai raggi di luce che passano pei due *F*, *D*; e se da questa posizione esso piano si fa muovere verso *D* in maniera che ogni suo punto percorrà una paralella ai raggi di luce, pervenuto che esso sia al punto *D*, i due incontri suddetti cadranno l' uno in *F*, e l' altro nello stesso punto *D*; adunque il punto *I* della medesima linea *MoO* trasferito fissamente su di esso piano ora troverassi nel segamento suddetto delle due linee rappresentanti le intersecazioni fatte dal pianó che passa per *D* perpendicolarmente alla *ML*, alle due superficie di rotazione ed involvente, e la retta *IA* trasportata anch' essa insieme al piano della *MoO* si confonderà colla perpendicolare tirata dal segamento medesimo al piano *MFL* o sia alla retta *DF*; quindi la distanza fra il punto *D* e quello dell' ortografia dimandata, il quale cade nella stessa *FD*, sarà eguale alla *AC*, e conseguentemente sarà esso l' *S* determinato sopra, come ho asserito.

Osservazione 1. Il punto di contatto fra la curva *MFL* e la retta paralella alla *O* sarà anco il punto di contatto fra la stessa *MFL* e la linea rappresentante l' ortografia sopra descritta, ed anche un termine di essa ortografia.

Osservazione 2. Anche in questa proposizione se l' ortografia a descriversi sarà la sola porzione cadente nello spazio *MFL*, l' ultimo punto della traccia *MoO*, che bisognerà determinare, sarà quello proveniente dall' anzidetto contatto, e sarà vantaggioso incominciare la determinazione dall' ortografia di questo medesimo contatto.

Ad esempio. Nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano l' ordinaria direzione, si troverà il punto *m* ( fig. 88 ) di contatto fra la curva *MFmL* e la sua tangente che fa l' angolo semiretto colla *ML*, si prenderà $mx = Mr$, ed *x* sarà l' ultimo punto della traccia *MTN* che si dovrà delineare. Fatto ciò, prenderansi nelle verticali *DN*, *dn*, - - primieramente le parti *FN*, *fn*, - -

eguali alle $MD$, $Md$, - -, e poscia $NC = CT = DF$, $nc = ct = df$, - -, e si tireranno ad esse le perpendicolari $TV$, $tv$, - -, e segheransi $SD = CV$, $sd = cv$, - -, e saranno $S$, $s$, - - punti appartenenti all' ortografia dimandata.

Osservazione 3. Se il piano dello spaccato, il cui lembo porta l' ombra sulla superficie, non passerà per l' asse della superficie medesima, ma sarà ad esso paralello ed anco al piano ortografico, ed avrà una data distanza dall' asse medesimo: supposto $ML$ (fig. 87) l' ortografia dell' asse della superficie, $MFL$ il suo spaccato, ed $\alpha D$ la distanza fra lo spaccato e questo asse; per avere il punto $S$ dell' ortografia della linea dell' ombra portata dal lembo in questo caso, dopo avere descritta la traccia icnografica della superficie involvente, corollario primo del *lemma primo*, trovato il punto $C$ come sopra, si prenderà l' orizzontale $C\beta$ eguale alla $D\alpha$ a destra della $HO$ se il piano $MFL$ sarà posteriore all' asse della superficie, ed a manca se sarà anteriore, e si descriverà l' archetto $I$ col centro $\beta$ e raggio $\beta O$; indi condurrassi $IA$ perpendicolare alla $HO$, e si prenderà $SD = AC$, e sarà $S$, ecc.

## PROPOSIZIONE XXXI.

*Di una superficie di rotazione che ha l' asse perpendicolare al piano ortografico, conoscendosi la sua icnografia o sia la generatrice piana, e l' ortografia di un suo paralello, trovare l' ortografia dell' ombra che porta la periferia di questo paralello o sia il contorno dell' ombra che accade sopra di essa superficie.*

$FT$ (fig. 89) sia l' asse della superficie, $MCB$ la sua generatrice piana situata nel piano icnografico coll' asse stesso, ed $MAN$ rappresenti la periferia del paralello o spaccato che porta l' ombra supposto adattatasi al piano icnografico col rotare indietro attorno alla $ML$ comune ai due piani ortografico ed icnografico.

Condotta l' $HFI$ paralella alla $O$, e la $GFE$ paralella alla $I$, si tiri $CDE$ paralella alla $ML$, la $EI$ alla $TF$, si descrivano col centro $I$ e raggio $MF$, e col centro $F$ e raggio $CD$ gli archetti $a$, ed i loro segamenti saranno due punti dell' ortografia dimandata.

S' immagini un piano paralello allo spaccato $MAN$ al di là di esso e ad una distanza eguale alla $DF$: questo piano segherà evidentemente la superficie di rotazione nella periferia di un cerchio verticale che avrà il centro nell' asse $FT$ orizzontale ed il raggio eguale alla $CD$, e la superficie involvente in un cerchio pure verticale ed eguale alla $MAN$, e che avrà il centro nell' asse della medesima superficie involvente, e però nella retta tirata pel punto $I$ perpendicolarmente al piano stesso $MAL$. Ma questi due circoli hanno evidentemente per ortografie quelli delle cui periferie sono parti gli archetti $a$; adunque i segamenti di questi archetti rappresenteranno le ortografie dei segamenti delle periferie dei medesimi due circoli, e conseguentemente due punti dell' ortografia dimandata.

Osservazione 1. Nell' ipotesi ordinaria rispetto alla direzione della luce la $FI$ è eguale evidentemente alla $FH$; e però non farà bisogno di segnare le $FE$, $DE$, $EI$, ecc.

Nel medesimo caso si potrà determinare l' ortografia del contorno dell' ombra con maggiore semplicità nel modo seguente:

La linea *MCB*, che devesi fare per determinare l' ortografia dimandata, si disegni nella *Mcb* anteriore alla *ML*, e si faccia l'angolo *LFI* semiretto; indi si tiri l' orizzontale *cdI*, e si descrivano col centro *I* e raggio *MF* e col centro *F* e raggio *dc* gli archetti *a*, e nei loro segamenti *a* avransi evidentemente due punti della linea dimandata; giacchè, se *Fd* eguaglia *FD*, la *dc* risulta eguale alla *DC*.

Osservazione 2. Per trovare i termini dell' ortografia in quistione, o sia i suoi segamenti o punti di contatto colla periferia *MAN*, si condurrà la tangente *MT* della curva *MB*, troveransi, corollario della proposizione tredicesima, i segamenti fra la periferia *MAN* e l' ellisse rappresentante l' ortografia dell' ombra portata dalla stessa periferia sulla superficie del cono retto che ha per altezza la sottotangente *FT* e per base lo stesso cerchio *MAN*; e questi saranno evidentemente gli stessi punti dimandati.

Se la tangente *MT* risulterà paralella all' asse *TF*, la superficie anzidetta circoscritta a quella di rotazione sarà cilindrica; e però, condotte le tangenti alla linea *MAN* paralelle alla *O*, nei punti di contatto si avranno immediatamente gli anzidetti, siccome è evidente.

## PROPOSIZIONE XXXII.

*Data una superficie di rotazione che ha l' asse verticale, e la sua ortografia e quella di una sezione piana qualunque fatta pel suo asse, trovare l' ortografia dell' ombra che porta il lembo di questa sezione sulla superficie medesima.*

Sia *MVL* (fig. 90) l' ortografia della superficie, e *DVP* quella della sezione piana che porta l' ombra.

Si tiri la *DE* perpendicolare alla *ML* asse, e si congiunga la *FE* eguale alla *MF*, e si trovi la traccia icnografica *EGH* della superficie cilindrica, che ha le rette generatrici paralelle alla *I*–*O*, e per direttrice la sezione avente *DVP* per ortografia, e la retta *EFH* per icnografia, *lemma primo*, cioè la sezione il cui lembo porta l' ombra; indi si tiri *FK* paralella alla *I*, si faccia l' angolo *IFL* eguale al *BCa* della figura prima, conducasi l' orizzontale *AJ* e la verticale *IK*, si descriva col centro *K* e col raggio *AJ* l' archetto *G*, calisi la verticale *GB*, e si seghi *AN* eguale alla *IB*, e sarà *N* il punto dove l' orizzontale *AJ* segherà l' ortografia dimandata, e però un punto di questa ortografia: veggasi la proposizione vigesimanona.

Osservazione. Se la sezione che ha *DVP* per ortografia cadrà di là dalla *MVL*, si condurrà la retta *DE* superiormente alla *ML*, e poi onde avere l' ortografia dell' ombra portata dalla medesima sezione si procederà come sopra.

Il termine superiore dell' ortografia *xNy* di cui si parla sarà un punto della linea *PV*, che si troverà facilmente, ecc.

Questa proposizione coll' antepenultima non solo ha comune la dimostrazione, ma anche i corollarj.

## PROPOSIZIONE XXXIII.

*Il cerchio* SBV ( fig. 91 ) *esprime lo spaccato di fronte di una superficie di rotazione che ha l' asse perpendicolare al piano ortografico ,* BTL *la posizione presa mediante un quarto di rotazione fatto intorno al raggio* BA *verticale dalla sezione fatta alla superficie col piano verticale condotto per l' asse di essa e perpendicolare all' ortografico ; trovare l' ortografia dell' ombra portata sulla superficie dal lembo di questa sezione.*

Costruita la traccia *BGQ*, *lemma vigesimottavo* , si descrivano gli archetti *n* , *z* ,-- coi centri *F*, *f*, -- e coi raggi *FG* , *fg* , --, e si tirino le *nr* , *uz* ,-- perpendicolari alle *FG* , *fg* ,--; indi facciansi le *As*, *Av* ,-- eguali rispettivamente alle *Fr* , *fu* ,-- e le orizzontali *st* , *vy* ,-- alle *rn*, *uz* ,--, e saranno *t* , *y* ,-- punti dell' ortografia dimandata *ty* -- *I*.

Suppongo che il piano della traccia *BGQ* si muova indietro , ed in modo che ogni suo punto percorra una paralella ai raggi di luce : giunto il punto *F* nell' asse della superficie di rotazione , il circolo che ha il centro in *F* ed il raggio eguale alla *FG*, cadrà nel paralello della medesima superficie avente il centro dove si troverà *F*, e la traccia *BGQ* si confonderà coll' intersecazione fatta dal piano di questo paralello alla superficie involvente , per cui il punto *n* cadrà nel segamento di questa intersecazione e della periferia del paralello ; e però essendosi fatto $As = Fr$, $st = nr$, il punto *t* esprimerà l' ortografia di questo medesimo segamento, e conseguentemente un punto dell' ortografia dimandata.
Quindi , siccome tutti i punti *t*, *y* , -- sono a circostanze affatto affatto simili a quelle del *t*, sarà *ty* -- *I* l'ortografia dimandata.

Osservazione 1. Se dal punto di contatto *T* fra la curva *BTL* e la sua tangente che fa colla orizzontale *ML* l' angolo eguale al complemento di Γ si condurrà la *TI* perpendicolare alla *AB*, si avrà il punto *I* segamento fra questa retta *AB* e l' ortografia in quistione.

Osservazione 2. Così, se abbisognerà la sola porzione dell' ortografia cadente nell' angolo *BAL*, onde risparmiare le operazioni inutili , dal punto *T* si calerà la verticale *TN* , condurrassi la *NP* paralella alla *CF*, o si farà pel punto *N* ciò che si è fatto pel *C*; indi si farà la verticale *PQ* eguale alla *TN* , e sarà *QGB* la sola porzione della traccia suddetta che bisognerà descrivere : si procederà poi alla determinazione delle coordinate *fu*, *uz*, -- dei punti *n* , *z* , incominciando dai prossimi al *Q* , e si continuerà sino a quello che cadrà in *B* ; giacchè da quest' ultimo proverrà l'altro termine della ortografia , il quale sarà nella paralella alla *O* e che passa per *B*.

## PROPOSIZIONE XXXIV.

*Data l' ortografia di una superficie di rotazione che ha l' asse verticale, e quella di una sua apertura orizzontale, trovare l' ortografia dell' ombra che porta il lembo di quest' apertura sulla medesima superficie.*

L' ortografia della superficie e ad un tempo il suo spaccato ordinario sia $AVB$ (fig. 92), e quella della sua apertura orizzontale $DE$.

Si disegni $VFO$ asse di rotazione della superficie, la $FG$ paralella alla $O$, e la $FH$ che faccia colla $FE$ l' angolo $EFH$ eguale al dato $BCA$ della figura prima; indi si tiri l' orizzontale $IQ$, la verticale $PN$, e si descrivano gli archetti $m$, $m'$ col centro $N$ ed il raggio $EF$, e gli $s$, $s'$ facendo centro in $F$ e col raggio $IQ$, e dai loro segamenti $\alpha$, $\beta$ si calino le $\alpha r$, $\beta r'$ verticali, ed avransi in $r$, $r'$ due punti dell' ortografia dimandata $rvr'$.

Si tiri $In$ paralella alla $FN$, o sia facciasi l' angolo $QIn$ anch' esso eguale all' anzidetto $BCA$, e si estenda la verticale $NP$ sino in $n$.

Immagino il piano orizzontale per la $IQ$; questo interseca la superficie di rotazione nella periferia del cerchio orizzontale avente il centro in $I$ ed il raggio eguale alla $IQ$, e la superficie involvente nella periferia pure circolare ed orizzontale che ha il raggio eguale ad $EF$ ed il centro nell' incontro del piano stesso e della paralella ai raggi di luce che passa per $F$, o sia nel punto ove l' orizzontale passante per $P$ perpendicolarmente alla $IQ$ è incontrata dall' altra orizzontale condotta per $I$ di là dalla $IQ$, e che fa con questa l' angolo eguale al dato $HFE$.

I segamenti di queste due periferie sono punti della linea dell' ombra di cui si parla, e però tirate da essi le perpendicolari al piano ortografico o sia alla retta $IQ$, nei piedi di esse avransi due punti dell' ortografia medesima.

Se quella parte del piano immaginato, la quale cade di là di $AVB$, rotando intorno alla $IQ$ insieme alle linee esistenti in essa, si dispone sotto della $IQ$, e la rimanente parte superiormente della medesima retta, il centro della sezione fatta da esso piano alla superficie involvente cadrà evidentemente in $n$; e però i piedi delle perpendicolari anzidette saranno quegli stessissimi delle perpendicolari tirate alle medesime $IQ$ dai segamenti delle periferie che hanno i centri in $I$ ed $n$, ed i raggi eguali, la prima alla $IQ$, la seconda alla $EF$.

Ma i triangoli che hanno per base la $In$ ed i vertici nei due segamenti di queste ultime periferie, sono eguali perfettamente ai due $F\alpha n$, $F\beta N$, stante l' eguaglianza dei lati; adunque, *lemma vigesimonono*, le perpendicolari tirate dai loro vertici o dai segamenti delle due anzidette periferie cadranno nelle $\alpha r$, $\beta r'$; e però i piedi $r$, $r'$ di queste coincideranno coi piedi di quelle, o saranno due punti dell' ortografia dimandata; ciò che ecc.

Osservazione 1. Tirando dai punti $D$, $E$ le paralelle alla $FG$, avransi in esse due tangenti dell' ortografia anzi descritta, i cui punti di contatto saranno comuni coll' ortografia dell' ombra portata dalla linea $AVB$ e delineata nella proposizione vigesimanona; questi contatti saranno i due termini inferiori della linea esprimente l' ortografia della linea dell' ombra portata dal lembo della semiapertura posteriore al piano verticale $AVB$, e la sola che si dovrà descrivere nei disegni degli spaccati ordinarj delle volte.

Osservazione 2. Se i raggi di luce avranno tal direzione che gli angoli $GFE$, $HFE$ risultino eguali, le due rette $FG$, $FH$ coincideranno; e però

$N$ centro degli archetti $m$, $m'$ cadrà in $P$; quindi in questo caso, il quale ha luogo evidentemente quando i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, si guadagnerà assai in semplicità; giacchè non si avrà bisogno di condurre le verticali analoghe alla $NP$.

Osservazione 3. Rappresentando colla $ML$ l'icnografia del piano dello spaccato ordinario della superficie di rotazione, fatto l'angolo $TOL$ eguale all'$HFE$, condotta $PT$ verticale o sia prolungata la $NP$ sino a segare la $ML$, e poscia descritti gli archetti circolari $y$, $y'$ facendo centro in $T$ e col raggio eguale alla $FE$, ed i due $x$, $x'$ col centro $O$ e col raggio eguale alla $IQ$, si avranno nei loro segamenti $t$, $t'$ due punti dell'icnografia della linea dell'ombra della quale sopra si è trovata l'ortografia.

Imperciocchè, se le sezioni fatte alla superficie di rotazione ed all'involvente del piano orizzontale immaginato secondo la $IQ$ si calassero verticalmente sino al piano icnografico, egli è evidente che esse coprirebbero le due periferie descritte coi centri $T$, $O$ ed i raggi eguali alle $EF$, $IQ$, ed i loro segamenti cadrebbero per conseguenza nei $t$, $t'$; quindi ecc.

Nel modo stesso che si sono determinati i due punti $t$, $t'$, troveransi quanti altri punti si vorranno dell'icnografia medesima.

Osservazione 4. Tutto ciò che si è detto qui sopra rispetto all'ortografia in quistione, nell'ipotesi che l'asse della superficie sia verticale, vale, comunque sia disposto, questo asse paralellamente al piano ortografico, purchè si sostituisca all'angolo $BCA$ della figura prima quello compreso dalla $IQ$ e dalla projezione ortogonale della paralella ai raggi di luce fatta sul piano del paralello della superficie, il quale passa per la retta $IQ$, ed alle rette verticali ed orizzontali le paralelle e perpendicolari all'asse medesimo; così, se l'asse sarà orizzontale, o sia se la superficie di rotazione sarà quella considerata nella proposizione trentesima, e l'apertura una sezione perpendicolare all'asse medesimo, avrassi l'ortografia dell'ombra portata dalla periferia di quest'apertura sulla superficie colla regola dichiarata qui sopra, sostituendo all'angolo $BCA$ anzidetto il $\Gamma$ pure dato, e alle rette orizzontali e verticali le verticali ed orizzontali.

## PROPOSIZIONE XXXV.

*Di una superficie di rotazione avente l'asse verticale, conoscendosi la sua ortografia e quella di una sua apertura qualunque, trovare l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie dal lembo di essa apertura.*

Sia $MVL$ (fig. 93) l'ortografia della superficie, ed $fkr$ quella di una sua apertura posteriore al piano che passa per l'asse di rotazione.

Si trovi primieramente l'icnografia $RKF$, *lemma trentesimo*, indi si descriva la traccia icnografica 234 della superficie cilindrica che ha le rette generatrici paralelle alla $I-O$ ed il contorno dell'apertura per direttrice, *lemma primo*: fatto ciò, si troverà l'ortografia $vsx$ richiesta nel modo dichiarato nella proposizione vigesimanona, e come lo mostra chiaramente anche la figura.

## PROPOSIZIONE XXXVI.

*L' asse di una superficie di rotazione è la* ML ( fig. 94) *orizzontale e paralella al piano ortografico, si conosce* MHL *ortografia di essa superficie, ed* FEK *di una sua apertura, trovare l' icnografia di questa apertura, la traccia fatta al piano che passa per* AMN ( fig. 94 ) *perpendicolarmente alla* ML *dalla superficie cilindrica avente le rette generatrici paralelle ai raggi di luce, e per direttrice il contorno della stessa apertura; in ultimo determinare l' ortografia dell' ombra portata sulla superficie di rotazione dal lembo della medesima apertura.*

La *ML* asse di rotazione della superficie di rotazione sia anche quello comune ai piani ortografico ed icnografico.

Si tiri *CH* perpendicolare alla *ML*, ed *EI* paralella, si descriva l' arco *HI* col centro *G*, si prenda $GB = EI$, e sarà *B* un punto dell' icnografia richiesta *UBD*.

Si conducano *BA*, *EN*, *NO* paralelle alle *I*, *O*, *ML*, prendasi *NO* eguale ad *MA*, ed in *O* avrassi un punto della traccia *SOT* dimandata; supposto che siasi adattata al piano *MHL* rotando attorno alla verticale *MN*.

In ultimo si seghi della verticale *OP* la parte *OQ* eguale alla *CH*, si descriva l' archetto circolare *S* col centro *Q* e col raggio *OQ*, si tiri *SR* perpendicolare alla stessa *OQ*, e facciasi *GV* eguale alla *QR*, ed il punto *V* apparterrà all' ortografia *xVy* dell' ombra in quistione.

Facendo rotare *HIC* intorno alla *GH* di un quarto di rotazione, ed in modo che si disponga di là del piano *MHL*, evidentemente il punto *I* passerà in quello del contorno dell' apertura, il quale ha l' *E* per ortografia; e però essendosi fatto $GB = EI$, sarà *B* l' icnografia del medesimo, come ho detto.

Le linee *SOT*, *xVy* rappresenteranno la traccia e l' ortografia richiesta per quello che si è già detto nella proposizione trentesima e nel *lemma ventesimosettimo.*

Osservazione 1. Se dell' apertura si conoscerà l' icnografia *UBD* in vece dell' ortografia, e si vorrà questa, si descriverà l' arco circolare *CH*, facendo centro in *G*, si tirerà *BC* paralella alla *ML*, segherassi *EG* eguale alla *BC*, ed *E* sarà un punto della richiesta ortografia *FEK*.

Osservazione 2. Così, se l' apertura che ha l' ortografia data *FEK* sarà di qua della sezione che passa per l' asse ed è paralella al piano ortografico, prendendo $GL = EI$, otterrassi in *l* un punto dell' icnografia *vld* della medesima apertura.

---

## PROPOSIZIONE XXXVII.

*Data l' ortografia e l' icnografia di una superficie di rotazione avente l' asse perpendicolare al piano ortografico, e l' ortografia di una sua apertura, trovare l' icnografia di questa, la traccia ortografica della superficie cilindrica che ha il contorno dell' apertura stessa per direttrice, e le rette generatrici paralelle ai raggi di luce; in ultimo delineare l' ortografia dell' ombra che porta questo contorno medesimo sulla superficie.*

Sia *ML* ( fig. 95 ) la retta orizzontale che passa per *D* centro della stessa ortografia *MFL* della superficie ed è nei due piani coordinati, *BD* l' asse della medesima superficie, ed *MBL* la sua icnografia, ed *EGF* l' ortografia dell' apertura.

Si faccia *DR* eguale alla *DG*, le *RC*, *GP* paralelle alla *BD*, e la *PA* eguale alla *RC*, oppure la *CA* paralella alla *ML*, ed avrassi in *A* un punto appartenente alla *NAQ* icnografia dell' apertura.

Tirinsi le *AH*, *GS*, *HS* paralelle rispettivamente alle *I*, *O*, *BD*, e si determinerà evidentemente il punto *S* della *TSV* traccia ortografica della superficie involvente; indi si faccia per la traccia *TSV* e l' ordinata *CZ* della *MCB* ciò che si è fatto nella proposizione trentesimaterza per la traccia *BGQ* e l' ordinata *CD* della *BTL*, e si otterrà l' ortografia *egf* dell' ombra portata sulla superficie dal lembo dell' apertura che ha *EGF* per ortografia.

Il punto che ha l' ortografia in *G* si trova nella periferia del paralello avente il raggio eguale alla *DG*, e però la sua icnografia sarà nella *CZ* traccia icnografica di questo paralello. Ma la medesima icnografia si deve trovare nella *GP*; adunque sarà essa in *A*.

Così, per essere le *AH*, *GS* paralelle rispettivamente alle *I*, *O*, e la *HS* perpendicolare alla *ML*, sarà *S* un punto della traccia ortografica della superficie involvente, *lemma primo*.

Osservazione. Per avere l' ortografia *EGF*, quando sia data l' icnografia *NAQ*, si tireranno le *CZ*, *GA* paralelle alle *ML*, *BD*, e si prenderà $DG = CZ$, ed avrassi un punto *G* dell' ortografia, ecc.

## PROPOSIZIONE XXXVIII.

*Trovare l' ortografia dell' ombra portata da una data retta orizzontale sopra una superficie di rotazione che ha l' asse verticale, conoscendosi l' ortografia sì delle superficie che del suo asse, e l' ortografia ed icnografia della retta obbiettiva.*

Sia *FEG* l' ortografia ( tav. IX, fig. 96 ) della superficie di rotazione, *EM* quella del suo asse; ed *AB*, *CL* siano l' ortografia e l' icnografia della retta obbiettiva, ed *ML* sia la retta comune ai piani ortografico ed icnografico.

Condotta *MD* perpendicolare alla *DL*, e la *DH* paralella alla *I*, si tirino le *LB*, *HI*, *DN* paralelle alla *ME*, e la *NI* alla *O*; indi congiungasi la

$BIP$ e la $NP$: fatto ciò, tirinsi successivamente le $CK$, $OQ$, $RQR'$ perpendicolari rispettivamente alle $EM$, $LM$, $DM$, descrivansi gli archetti $R$, $R'$ col centro $M$ ed il raggio eguale alla $GK$, conducansi le $Rr$, $R'r'$ paralelle alla $EM$, ed avransi in $r$, $r'$ due punti dell' ortografia dimandata.

Essendo $I$ e $B$ gl' incontri del piano ortografico e delle rette $ANB - CDL$, $NI - DH$, cioè della data e della paralella ai raggi di luce che passa pel punto $D - N$, sarà $BIP$ la traccia ortografica del piano di queste medesime due rette o sia di quel piano la cui intersecazione colla superficie di rotazione costituisce la stessissima linea dell' ombra in quistione.

Così, per essere $MD$ perpendicolare alla $CL$, il piano che passa per essa e per $EM$ asse della superficie non solo sarà perpendicolare alla stessa $CL$, ma anche alla retta data; e però al piano anzidetto, cioè al piano delle due rette $NI - DH$, $ANB - CDL$.

Il punto $D - N$ è comune ai due piani qui nominati, per essere nella retta $ANB - CDL$ e nella paralella alla $AM$ tirata pel punto $D$, le quali giacciono l' una in uno e l' altra nell' altro dei medesimi due piani; il punto $P$ ovvero $M - P$ troverassi nei medesimi due piani, per essere nelle loro tracce ortografiche; adunque le rette $NP$, $MD$, che uniscono separatamente le ortografie e le icnografie di questi punti, rappresenteranno la prima l' ortografia, e la seconda l' icnografia della retta comune intersecazione dei medesimi due piani.

S' immagini il piano orizzontale pel punto $K$, e segherà la superficie di rotazione nella periferia orizzontale che ha il centro in $K$ ed il raggio eguale alla $KG$, ed il piano delle $NI - DH$, $ANB - CDL$, cioè dell' ombra nella retta che passa pel punto $O - Q$ ed è perpendicolare al piano delle $AM$, $MD$: i segamenti di queste due intersecazioni appartenendo al piano dell' ombra ed alla superficie di rotazione, saranno due punti della linea dell' ombra stessa, e propriamente quelli che avranno le ortografie nell' orizzontale $GK$.

Ma la periferia orizzontale avente il centro in $K$ ed il raggio $KG$ ha per icnografia la $RR'$, e la retta che passa pel punto $O - Q$ ed è perpendicolare al piano delle $AM$, $MD$ ha la sua nella retta $RQR'$, ed i segamenti di due linee hanno le icnografie nei segamenti delle icnografie di esse medesime; adunque i segamenti $R$, $R'$ saranno le icnografie dei due punti anzidetti della linea dell' ombra in quistione, e conseguentemente i punti $r$, $r'$, i quali sono nella retta $KG$ e nelle $Rr$, $R'r'$ paralelle alla $AM$, apparterranno all' ortografia dimandata; ciò che voleva dimostrare.

Corollario 1. I punti $R$, $R'$, - - costituiscono l' icnografia della linea dell' ombra portata dalla stessa retta $AB - CL$ sulla superficie di rotazione.

Corollario 2. Presa $AS = MD$, congiunta $SfP$ e tirata l' orizzontale $fv$, si avrà nel segamento $v$ il punto più alto dell' ortografia dimandata.

Corollario 3. Per essere $QR = QR'$, sarà $O$ il punto di mezzo della corda $rr'$, o sia sarà $vP$ un diametro dell' ortografia descritta; e però delineata la parte di essa che trovasi da una parte della $vOP$, facilissimamente si potrà descrivere l' altra anche senza usare la regola esposta.

Corollario 4. Se la retta data, oltre di essere orizzontale, sarà anche paralella al piano ortografico, le $NP$, $MD$ cadranno nelle $AP$, $MP$, e la $RR'$ (tav. XI, fig. 97) risulterà perpendicolare alla $MP$, e però paralella ed eguale alla $rr'$.

In questo caso la retta $AK$, colla quale si confonde il diametro $NO$, segherà l' ortografia dimandata in due parti eguali perfettamente, anzi sarà essa un suo asse, e le distanze $Kr$, $Kr'$, le quali saranno eguali amendue alla $QR$, avranno i loro quadrati eguali

al quadrato della $MR$, meno quello della $MQ$; cioè sarà il quadrato di ciascuna delle rette $Kr$, $Kr'$ eguale a quello della $GK$, meno il quadrato della $Km$ che rappresenta la distanza che ha il punto $K-Q$ dalla $AM$ asse della superficie di rotazione.

Ma facendo $am = GK$, e $Kr = Kr' = Ka$, si ha

$$\overline{Kr'}^2 = \overline{Kr}^2 = \overline{Ka}^2 = \overline{am}^2 - \overline{Km}^2 = \overline{GK}^2 - \overline{Km}^2;$$

adunque i punti $r$, $r'$, ecc.

Quindi segata $AS$ eguale alla $MD$, cioè alla distanza che ha la retta obbiettiva dal piano ortografico, ed unito $S$ al punto $P$, ovvero fatto l'angolo $ASP$ eguale al complemento di $\Gamma$; e poscia tirate le $GK$, $FI$, - - perpendicolari alla $AM$, e segate le $ma$, $nb$, - - eguali alle $GK$, $FI$, - - e le $Kr$, $Is$, - - eguali alle $Ka$, $Kb$, - -, avransi i punti $r$, $s$, - - dell'ortografia dimandata, senza ricorrere all'icnografia della retta obbiettiva.

Segando $Kt = Km$, $Iu = In$, - - e facendo centro successivamente nei punti $t$, $u$, - -, e coi raggi eguali alle $GK$, $IF$, - - descritti degli archetti che seghino le stesse $r'G$, $s'F$, - -, i segamenti saranno gli stessi punti $r$, $r'$, $s$, - - dell'ortografia dimandata, e trovati altrimenti poc' anzi.

Nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione che fissano generalmente i disegnatori, essendo l' angolo $SPA$ semiretto, i punti $t$, $u$, - - cadranno tutti nel $P$.

Quindi, fatta $AP$ eguale alla $AS$, condotte le orizzontali $s'F$, $r'G$, - - e descritti gli archetti $r$, $r'$, $s$, $s'$, - -, facendo centro in $P$, e con un raggio, pei primi due eguale alla $KG$, pei due seguenti alla $IF$, ecc., avransi in un tratto i punti dell' ortografia dimandata.

Osservazione 1. Se la retta che porta l'ombra sarà la $VB-vb$ (tav. IX, fig. 98) comunque posta nello spazio, primieramente si condurranno $Vv$, $Ff$, $Bb$ paralelle alla $AH$ asse di rotazione della superficie, la $FT$ paralella alla $O$, la $ft$ alla $I$, la $Tt$ alla $Vv$; indi si congiungerà la $vt$, e si condurranno le rette $mb$, $BA$, la prima paralella alla $vt$ stessa, e la seconda alla $VH$ o sia orizzontale: fatto ciò, si determinerà, colla regola esposta, l'ortografia dell' ombra portata sulla superficie di rotazione dalla retta orizzontale $AB-mb$, qui determinata, e si avrà in essa la stessissima ortografia dell' ombra portata sulla medesima superficie dalla retta $VB-vb$, comunque posta nello spazio.

Imperciocchè essendo $v$ l' incontro della retta $VB-vb$ col piano icnografico, e $t$ quello della paralella ai raggi di luce che passa pel punto $F-f$ della stessa $VB-vb$, la retta $vt$ sarà la traccia icnografica del piano di queste due rette; e però, siccome $AB-mb$ ha il punto $B-b$ in questo piano ed è paralella alla $vt$, sarà essa un' orizzontale situata nel piano delle medesime $VB-vb$, $FT-ft$, cioè nel piano che passa per la data retta $VB-vb$ ed è paralello ai raggi di luce.

Ma le ombre portate dalle linee situate in un medesimo piano paralello ai raggi di luce cadono tutte nel piano stesso; adunque le ombre portate dalle rette $VB-vb$, $AB-mb$, le quali sono in uno stesso piano paralello ai raggi di luce, coincideranno fra loro; e conseguentemente l' ortografia dell' ombra che porta l' orizzontale $AB-mb$ sulla superficie di rotazione, determinata colla regola esposta, sarà la stessissima ortografia dell' ombra portata sulla medesima superficie dalla retta $VB-vb$, comunque situata nello spazio, come ho asserito.

Ad esempio. Se la retta che porta l' ombra fosse la $MD-PN$ (fig. 96) che incontra l'asse in $M-P$, condotta la $DN$ parallela all' asse, le $NI$, $DH$, $HI$ paralelle rispettivamente alle $O$, $I$, $AM$, congiunta $PIB$, e dal punto $B$ comune all' orizzontale $ANB$ tirata la verticale $BL$, indi unita $LDC$, si avrebbero nella $AB$ l' ortografia, e nella $CL$ l' icnografia di una delle rette orizzontali che portano sulla superficie l' ombra stessa cagionata dalla $MD-PN$.

Corollario 5. Così, se la retta dalla quale viene portata l' ombra sarà la paralella all' asse che passa per $T$ (tav. X, fig. 99), colla retta $TL$ paralella alla $I$ si confonderanno tutte le rette analoghe alla $RR'$ della figura novantesimasesta; quindi descrivendo l' archetto $R$ col centro $M$ ed il raggio eguale all' orizzontale $DH$, e tirando la $Rr$ paralella all' asse, si avrà in $r$ un punto dell' ortografia dimandata.

In questo caso, fatto $MP = MT$, e tirate le $Tt$, $PG$ paralelle alla $ME$, e la $Gt$ orizzontale, in $t$ segamento delle due $Tt$, $Gt$ si avrà un termine dell' ortografia dell' ombra; e segata $MZ$ eguale alla $MS$ perpendicolare alla $TL$, e condotte le $Zf$, $Sv$ paralelle alla $ME$, e la $fv$ orizzontale, sarà questa retta orizzontale tangente nel punto sublime dell' ortografia di cui si parla, e propriamente in $v$.

Corollario 6. In ultimo, cadendo la retta obbiettiva suddetta nell' asse stesso di rotazione (fig. 100), per avere l' ombra portata da essa retta sulla parte concava della superficie; tirata la $EH$ orizzontale e la $EF$ paralella alla $I$, si condurranno le orizzontali $CG$, $BI$, - -, e ad esse segheransi le parti $EF$, $EA$, - - eguali rispettivamente, indi si condurranno le $FP$, $AN$, - - paralelle all' $EC$ asse, ed avransi immediatamente in $P$, $N$, - - dei punti dell' ortografia dimandata; siccome è per sè stesso evidente.

Osservazione 2. Se la superficie di rotazione sarà la conica, che ha per ortografia $ABCF$ (fig. 101), e che la retta $ST$ analoga alla $SP$ della figura novantesimasesta, prolungata sufficientemente, seghi la $AF$, l' ortografia dell' ombra portata sulla medesima superficie dalla retta orizzontale avente $AB$ per ortografia ed una distanza eguale alla $GS$ dalla $GD$ asse del cono, sarà un arco ellittico di cui facilmente si potranno determinare i suoi termini e gli assi col metodo seguente:

Si trovi il punto $M$ di mezzo della $fT$, si tirino dai punti $f$, $V$, $M$ e $T$ le $fv$, $LVE$, $tMPs$, $TQ$ perpendicolari alla $DG$, e dall' $M$ anche la verticale $MN$; si faccia $PN = Ps$; indi $Pr = Pt = MV$, e saranno $L$ ed $E$ i due termini dell' arco ellittico, ed anche i due punti di contatto fra le rette $AF$, $BC$ e l' ortografia $LvE$, ed $rt$, $Qv$ i due assi dell' ellisse di cui sarà parte l' ortografia medesima.

Quindi questa linea non solo si potrà descrivere colle regole esposte qui sopra, ma anche colle notissime, colle quali descrivonsi comunemente le periferie ellittiche, allorchè si conoscono i loro assi.

## PROPOSIZIONE XXXIX.

*Data l' ortografia* DAB (*fig.* 102) *di una superficie di rotazione che ha l' asse* AGM *verticale, e date l' ortografia ed icnografia di una linea qualunque, trovare l' ortografia dell' ombra portata da questa linea sulla superficie medesima.*

Al solito, sia $ML$ l' asse comune ai piani ortografico ed icnografico.

Si trovi la traccia $KNF$ icnografica della superficie involvente, *lemma primo*, indi conducasi l' orizzontale $DCB$, la $GQ$ paralella alla $O$, la $MO$ alla $I$, e la $QO$ perpendicolare alla $ML$, e descrivansi gli archetti $N$, $F$, facendo centro in $O$ e col raggio eguale alla semicorda $BG$; tirinsi $NP$, $FL$ perpendicolari anch' esse alla $ML$, e le $PH$, $LI$ paralelle alla $GQ$, e saranno $H$, $I$ due punti dell' ortografia richiesta.

Essendo $GQ$ paralella alla $O$, $MO$ alla $I$ ed $OQ$ alla $MA$, sarà $O$ il centro della periferia circolare traccia icnografica della superficie cilindrica avente le rette generatrici paralelle alla $O-I$, e per una direttrice la sezione fatta alla superficie di rotazione dal piano orizzontale che passa per la $BD$; e però i punti $N$, $F$ comuni a questa traccia circolare ed anche alla $KNF$ apparterranno alle rette generatrici comuni alla detta superficie cilindrica ed all' involvente. Ma i punti $H$, $I$ sono nelle $PH$, $LI$ ortografie di queste rette generatrici e nella $BD$ ortografia, ecc.

Corollario. Se la linea obbiettiva sarà una periferia circolare ed orizzontale, si potrà determinare l' ortografia dimandata in un modo affatto simile a quello usato nella proposizione trentesimaquarta.

### Osservazione ottava.

Se le superficie di rotazione non saranno disposte, come ho supposto nelle proposizioni trattate, si troveranno le projezioni ortogonali, fatte su due piani, condotti l' uno per l' asse di rotazione, e l' altro perpendicolare al medesimo, delle ombre portate sopra di esse superficie; indi colla regola esposta ed usata nella proposizione decimaterza della parte antecedente si otterranno l' ortografia e l' icnografia delle medesime. Altrettanto si dica per le altre superficie.

---

# DE' CONTORNI

## DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE SPIRALI.

### PROPOSIZIONE XL.

*Trovare l'ortografia dell'ombra che porta una linea qualunque sulla superficie delle colonne spirali, conoscendosi l'ortografia e l'icnografia della linea medesima e la superficie, come nella proposizione duodecima della seconda parte.*

Sia $ABC$ - - (fig. 103) l'icnografia ed $abc$ - - l'ortografia della direttrice o sia della linea nella quale vi sono i centri delle sezioni orizzontali della superficie della colonna.

Si descriva $DEF$ traccia icnografica della superficie cilindrica che ha le rette generatrici paralelle ai raggi di luce e che passa per la linea obbiettiva, *lemma primo*: fatto questo, tirisi $Bb$ perpendicolare ad $NbP$ paralella alla $ML$ asse, le $bH$, $Bh$ paralelle rispettivamente alle $O$, $I$, e la $hH$ anch' essa perpendicolare all' $LM$; indi descrivansi gli archetti $D$, $E$ col centro $h$ e col raggio eguale a quello della sezione orizzontale della colonna che ha il centro $B-b$; si facciano le $DL$, $EM$ perpendicolari alla $LM$, e poi le $LN$, $MP$ paralelle alla $Hb$, ovvero seghinsi $bN = LH$, e $bP = HM$, ed avransi in $N$, $P$ due punti dell' ortografia dimandata.

Pel punto $h$ si conduca $lhm$ paralella alla $LM$.

La linea che rappresenta sulla superficie della colonna l' ombra portata dalla data, essendo nella superficie cilindrica che ha le rette generatrici paralelle ai raggi di luce e per traccia icnografica la linea $DEF$, cioè nell' attuale superficie involvente, sarà essa linea l'intersecazione di queste medesime due superficie; così, per essere le $bH$, $Bh$ paralelle rispettivamente alle $O$, $I$, e le $Bb$, $hH$ perpendicolari alla $LM$, il punto $h$ sarà l' incontro del piano icnografico colla paralella ai raggi di luce che passa pel punto $B-b$.

Si supponga che il piano icnografico od almeno la sua porzione in cui vi sono i punti $D$, $E$, $h$, $M$, $H$ ed $L$ si muova, conservandosi orizzontale, senza fare verun moto di rotazione, più che il punto $h$, fisso in esso piano, percorra la retta $Hb-hB$: egli è evidente che la linea $DEF$ genererà, movendosi in tal maniera, la stessissima superficie involvente. Giunto che sarà il punto $h$ nel $B-b$, la retta $lm$ confonderassi colla paralella alla $LM$ che passa per $B-b$ ed ha per ortografia $NP$, la $DEF$ colla sezione fatta alla superficie involvente dal piano orizzontale che passa per la $NP$ stessa; e la periferia di cui sono parti gli archetti $D$, $E$ cadrà nell' intersecazione fatta da questo piano orizzontale alla superficie della colonna; e però i punti $D$, $E$ comuni ad ambedue queste linee, e per conseguenza alla superficie della colonna ed alla involvente, saranno, in questa loro nuova situazione, nella linea medesima che rappresenta sulla superficie della colonna l'ombra di cui si parla; quindi i punti $N$ e $P$, per essere i piedi delle perpendicolari tirate da questi due punti al piano ortografico, apparterranno all' ortografia dimandata; ciò che volevasi dimostrare.

Osservazione. Se l' obbiettiva $ABC-abc$ fosse quella determinata nella proposizione duodecima della parte seconda, la linea delineata qui sopra rappresenterebbe l' ortografia di un estremo della stessa ombra cadente sulla superficie della colonna spirale; e questa linea e quella sarebbero le sole che bisognerebbe delineare, volendo ombreggiare il disegno ortografico della colonna stessa.

## PROPOSIZIONE XLI.

*Data la generatrice e la direttrice di una superficie spirale, ed un' altra linea qualunque, trovare l' ortografia dell' ombra che cagiona quest' ultima linea sulla superficie stessa; supposto che l' elice direttrice sia ordinaria ed abbia l' asse verticale, come nella proposizione anzicitata.*

Si costruisca una individuata sezione orizzontale della data superficie, per esempio, quella esistente nel piano orizzontale condotto per la retta *bt* (tav. XI, fig. 104), cioè la *FE7*, *lemma trentesimoprimo*, non che la *GHI* traccia icnografica della presente superficie involvente, *lemma primo*; fatto questo, dai punti *D*, *d* della *Dd* paralella alla *Aa* si tirino le *Dm*, *dn* rispettivamente paralelle alle *I*, *O*; indi la *mn* perpendicolare all' asse *ML*, e la *mu* paralella alla *ADF* ed eguale alla *BE*; e poscia si faccia scorrere nel piano icnografico la linea *FE7* in guisa che il punto *B* passi in *m*, e la retta *BE* nella *mu*, e sia essa curva in questa novella posizione rappresentata dalla *GuH*; e dai punti *G*, *H* comuni a questa nuova linea ed alla traccia *GHI* si tirino le *Gg*, *Hh* perpendicolari alla *ML*: finalmente conducansi le *gr*, *hs* paralelle anch' esse alla *O*, e nei segamenti *r*, *s* di queste coll' orizzontale *rds* si avranno due punti dell' ortografia richiesta.

Non espongo la dimostrazione di questa determinazione, perchè essa sarebbe una ripetizione di quella della proposizione antecedente.

Corollario. Tirando pei punti *r*, *G* le rette paralelle rispettivamente alle *At*, *Dm*, nel loro segamento avrassi l' icnografia di quel punto della linea dell' ombra il quale ha l' ortografia in *r*; così nel segamento delle due analoghe paralelle tirate pei punti *s*, *H* cadrà l' icnografia di quel punto dell' ombra portata avente l' ortografia in *s*.

Osservazione 1. Se la linea 123 generatrice sarà retta, come lo è per le superficie dei filetti delle viti triangolari, si potrà determinare l' ortografia dell' ombra portata su di essa superficie dalla linea obbiettiva data nella proposizione esposta anche senza delineare la sezione orizzontale della superficie spirale, e ciò nel modo seguente:

Primieramente si descriva la traccia ortografica della superficie involvente, e poscia, supposto *to* = *tb*, si prenda nella *AF*, incominciando in *A*, una parte eguale alla *t*1, ed all' altro termine di questa parte si tiri la paralella alla *Aa*, e si unisca il segamento di questa colla *ds* al punto della *Aa*, che è distante dal punto *a* quanto il *t* lo è dal segamento fatto alla *Aa* stessa dal prolungamento della 123, e in questa retta congiungente si avrà l' ortografia di quella generatrice della superficie la quale ha l' icnografia nella *AF*: fatto ciò, trovinsi i punti dove questa generatrice e la *Dm* - *dn* incontrano il piano ortografico, uniscansi questi incontri, e pei

segamenti di quest' ultima retta colla traccia anzidescritta si tirino le paralelle alla $O$, che nei loro segamenti coll' ortografia della detta generatrice si avranno dei punti dell' ortografia dimandata.

Osservazione 2. Se i raggi di luce saranno orizzontali, non avrà più luogo la traccia icnografica della superficie involvente ; e però non sarà più buona la regola esposta per determinare l' ombra in quistione. In tal caso, per avere quest' ombra, o sia le sue projezioni,

Delineerassi la $FE7$ come sopra, e la traccia ortografica della superficie involvente: fatto questo, si estenderà l' orizzontale $ds$ sino a segare questa traccia ortografica, e dai segamenti, i quali saranno quei punti di essa traccia distanti dalla $ML$ quanto lo è il $d$, si tireranno le perpendicolari alla stessa $ML$, e dai piedi di queste le paralelle alla $I$; ed i punti dove queste paralelle segheranno, dalla parte da cui perverrà la luce, la linea $FE7$ trasportata in modo che il punto $B$ cada in $D$, e la retta $BE$ secondo la $DF$, apparterranno all' icnografia dell' ombra cercata; e però conducendo per questi punti delle paralelle alla $Aa$, nei segamenti di queste rette colla $a1$ avransi altrettanti punti dell' ortografia dell' ombra medesima.

Se poi i raggi di luce, oltre di essere orizzontali, saranno di più paralelli alla $Ah$, bisognerà eseguire pel piano dei profili ciò che si è qui indicato per l' ortografico.

## DE' CONTORNI

### DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE DE' CANALI.

Le linee $EMF$, $ABC$ ( fig. 105 e 106 ) sono quali si vogliono. Se l'$ABC$ si moverà in modo che il suo piano mantengasi perpendicolare alla $EMF$, la retta $AC$ sempre orizzontale, e che il punto $D$ di mezzo della stessa $AC$ percorra la linea medesima $EMF$, la curva $ABC$ genererà una di quelle superficie le quali, siccome già dissi, si chiamano superficie de' canali.

## PROPOSIZIONE XLII.

*Della superficie dei canali qui individuata, e che ha per ortografia e ad un tempo per ispaccato ordinario* CAXY *(fig. 107), trovare l' ortografia dell' ombra portata su di essa dalle linee aventi per ortografie* ANC, ABX, *e situate in essa superficie.*

Egli è evidente che l' ortografia richiesta dovrà essere in generale composta di due linee differenti, essendo diverse le $ABX$, $ANC$.

Descritta la sezione $BG$ fatta alla superficie dal piano perpendicolare all' ortografico e che passa per la retta $BD$ paralella alla $O$, *lemma trentesimoterzo*, si faccia l' angolo $GBD$ eguale al $\Delta$, e dal segamento $G$ della

retta $BG$ e della curva $BG$ conducasi $GL$ perpendicolare alla stessa $BD$, e si avrà in $L$ il punto della linea rappresentante l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie dal $B$; così descritta la sezione $RS$ che il piano condotto lungo la $NP$ paralella alla $O$ e perpendicolare all'ortografico fa alla superficie, tirata $RS$ paralella alla $BG$, e dal segamento $S$ la $ST$ perpendicolare alla $NP$, sarà $T$ un punto dell'ortografia dell'ombra portata sulla superficie dal suo contorno avente l'ortografia nella $ANC$.

Si faccia rotare la curva $BG$ insieme alle rette $BG$, $GL$ attorno alla $BD$, e di tanto che essa divenga perpendicolare al piano ortografico al di là del medesimo: in tale situazione la retta $BG$ sarà nella paralella ai raggi di luce che passa per $B$, il punto $G$ si confonderà con quello della superficie, in cui cadrà l'ombra portata dal $B$ stesso, e la retta $GL$ rappresenterà la perpendicolare tirata da questo punto al piano ortografico; quindi $L$ piede di questa sarà il punto dell'ortografia dell'ombra portata dallo stesso punto $B$ del contorno $ABX$.

In una maniera affatto simile si dimostra che $T$ esprime l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie da quel punto del contorno di essa, il quale ha $N$ per ortografia. Facendo per tutti i punti della $ABX$ ciò che si è fatto pel $B$, e per quelli aventi l'ortografia nella $ANC$ ciò che si è fatto pel punto $N$, si otterrà l'intera ortografia $VLZ$ richiesta.

Osservazione 1. Così, facendo pel punto $A$ quanto si è fatto pel $B$, avrassi in $H$ il punto comune alle due differenti linee $VH$, $HZ$ che costituiscono l'ortografia dimandata.

Osservazione 2. Se la $AC$ sarà verticale, descritta la linea $AFE$ rappresentante la sezione fatta alla superficie dal piano perpendicolare all'ortografico e che passa per la $AC$ stessa, supposto adattata al piano ortografico medesimo col rotare attorno alla $AC$; e poi condotta quella tangente ad essa $AFE$ che fa colla verticale $AC$ l'angolo eguale al $\Gamma$, e dal punto $F$ di contatto la $VF$ perpendicolare alla stessa $AC$, in $V$ si avrà un termine della prima parte delle due linee costituenti l'ortografia in quistione.

Osservazione 3. Si guadagnerà assaissimo in semplicità seguendo un ordine successivo nella determinazione dei punti dell'ortografia dimandata, giacchè così facendo il giudizioso disegnatore potrà descrivere delle linee $RS$, $BG$ quelle sole piccolissime porzioni in cui cadranno i segamenti $S$, $G$ che gli abbisogneranno per delineare l'ortografia $VTHZ$.

Se la linea $XRZ$ (fig. 108 e 109) si moverà in modo che il suo piano mantengasi perpendicolare all'elice $LDE - Lde$, la retta $XZ$ orizzontale, e che il punto $Y$ di mezzo della stessa $XZ$ percorra l'elice medesima, la linea mobile $XRZ$ genererà una superficie elicoidica, cioè una di quelle superficie che costituiscono generalmente le volte delle scale a chiocciola, e che sono anche particolari superficie de' canali.

## PROPOSIZIONE XLIII.

*Data l' elice direttrice di una superficie elicoidica e la linea generatrice della medesima superficie, e supposto che le tangenti l' elice siano tutte egualmente inclinate all' orizzonte, appunto come succede nelle ordinarie scale a chiocciola, trovare l' ortografia del contorno dell' ombra che accade nello spaccato fatto dal piano ortografico alla superficie medesima.*

Sia *CAc* l' icnografia ( tav. X, fig. 110 ) ed *EAe* l' ortografia dell' elice direttrice, *BVL* la sezione fatta alla superficie dal piano ortografico; e siano *HB*, *BG* l' ortografia ed icnografia di una paralella ai raggi di luce o, sia due rette rispettivamente paralelle alle *O*, *I*.

Si descriva la linea *BSL* traccia icnografica della superficie elicoidica, *lemma trentesimoquarto*, e la *BTL* traccia pure icnografica della superficie involvente o sia della superficie cilindrica avente le rette generatrici paralelle ai raggi di luce, e per una direttrice la curva data *BVL*, corollario del *lemma primo*; tirinsi *imp* paralella, e le *itx*, *mn* perpendicolari all'asse *ML*; indi la *xy* eguale alla *BL* e paralella anch' essa alla *ML*, e le *rn*, *nd* eguali, la prima alla *AB*, e la seconda alla *AL*, e che siano amendue nella normale *rd* della curva *AC*, e descrivansi le curve *xvy*, *rvd* eguali perfettamente alle *BTL*, *BSL* ciascuna a ciascuna; e pel loro segamento *v* conducasi *vp* perpendicolare alla *ip*, ed avrassi in *p* un punto dell' ortografia *hpP* dimandata.

Il piano orizzontale che passa per la *ip* sega evidentemente il contorno dell' ombra in un punto che ha l' ortografia nella medesima retta *ip*, e taglia le due superficie, cioè l' involvente e l' elicoidica, in due linee, la prima delle quali ha per icnografia *xvy*, e la seconda *rvd*; e però essendo *v* l' icnografia del punto comune a queste due intersecazioni, il quale è conseguentemente il punto anzidetto del contorno dell' ombra, la sua ortografia sarà *p*, punto comune alla retta *ip* ed alla *vp* condotta per la sua icnografia *v* e perpendicolare all' asse *ML*, come ho asserito.

Corollario. Conducendo pel segamento *s* delle tracce *BSL*, *BTL* la retta *sP* perpendicolare alla *ML*, avrassi in *P* suo piede il punto ove l' ortografia in quistione segherà l' orizzontale medesima *ML*.

Osservazione 1. La superficie cilindrica avente le rette generatrici paralelle alla tangente in *A* l' elice direttrice, e la curva *BVL* per traccia ortografica, è evidentemente tangente la superficie elicoidica stessa lungo la medesima linea *BVL*; e però determinata l' ortografia dell' ombra portata su questa superficie cilindrica dalla linea *BVL*, proposizione undecima, nel segamento di quest' ortografia e della traccia *BVL* avrassi immediatamente il punto *h* termine superiore dell' ortografia di cui si parla, senza bisogno di delineare questa medesima ortografia.

Osservazione 2. Siccome tutte le sezioni orizzontali della superficie involvente sono fra loro eguali ed anche alle icnografie di esse, e simili proprietà hanno le analoghe sezioni della superficie elicoidica; così le linee *xvy*, *rvd* saranno eguali alle due *BTL*,

$BSL$, come ho supposto, ciascuna a ciascuna; e conseguentemente la determinazione del punto $v$ riescirà semplicissima, usando uno di quei metodi notissimi ai disegnatori.

Osservazione 3. Se le tangenti dell' elice direttrice non fossero tutte egualmente inclinate al piano icnografico, la sezione fatta alla superficie elicoidica dal piano orizzontale immaginato lungo $ip$ non sarebbe eguale alla $BTL$; e però in tal caso bisognerebbe descrivere effettivamente la linea $rvd$ icnografia della medesima sezione, cioè per ogni punto dell' ortografia richiesta converrebbe descrivere una differente linea $rvd$, ciò che rende questa regola quasi impraticabile al pari di qualunque altra che io seppi immaginare.

## Osservazione nona.

Paragonando le varie regole esposte per delineare i contorni delle ombre portate o le loro projezioni, ne risulta che, ommettendo le parti di esse regole esclusive alle particolari superficie considerate, ne risulta, dico, che per determinare l' ombra portata da una linea qualunque sopra qualsivoglia superficie, basta segare tanto questa superficie, quanto l' involvente con un medesimo piano, e tale che le sezioni siano facilmente descrivibili mediante le note proprietà delle due superficie medesime; giacchè nei segamenti delle linee esprimenti queste sezioni o nelle projezioni di essi analoghe a quelle richieste dell' ombra si avranno evidentemente altrettanti punti delle linee dimandate.

## Osservazione decima.

Come per le ombre proprie, così per le portate, acciocchè meno rimanga a desiderarsi, anche per queste analiticamente esporrò la soluzione generale della seguente proposizione: « *Trovare l'ombra portata da una linea qualunque su di qualsivoglia superficie* » che è in sostanza l' enunciata al principio di questa parte, cioè la proposizione più generale che si possa concepire rispetto alle ombre portate.

Supposto le linee e le superficie riferite tutte ai medesimi tre assi coordinati ortogonali, sia $F(x, y, z,) = 0$ l' equazione della superficie, ed

$$f(x', y', z') = 0, \quad \phi(x', y', z') = 0$$

siano quelle della linea che cagiona l' ombra: $x$, $y$, $z$ esprimono le coordinate di un punto della superficie, ed $x'$, $y'$, $z'$ quelle di un punto della linea obbiettiva.

Ritenuto che $m$, $n$ siano le tangenti degli angoli che fanno le rette $I$, $O$ colla comune ai piani ortografico ed icnografico, come nell' osservazione relativa all' iperboloide della proposizione ventesimaquinta, saranno

$$s - y' = m(t - x'), \quad u - z' = n(t - x')$$

le due equazioni della parallella ai raggi di luce e che passa pel punto dell' obbiettiva corrispondente alle coordinate $x'$, $y'$, $z'$: ammesso $t$, $s$, $u$ le coordinate di un suo punto qualunque ed analoghe alle $x$, $y$, $z$.

Eliminando le $x', y', z'$ dalle quattro equazioni

$$s-y'=m(t-x'),\ u-z'=n(t-x'),$$
$$f(x',y',z')=0,\ \phi(x',y',z')=0,$$

se ne ottiene una naturalmente della forma

$$\psi(t,s,u,m,n)=0,$$

la quale rappresenta la superficie cilindrica che passa per l' obbiettiva, ed ha le rette generatrici paralelle ai raggi di luce, vale a dire la superficie involvente. Ma la linea dell' ombra debb' essere nella superficie sulla quale si rende essa visibile, ed anche nell' involvente; adunque sarà essa data dalle due equazioni seguenti

$$F(x,y,z)=0,\ \psi(x,y,z,m,n)=0;$$

$x, y, z$ esprimono qui le coordinate di un punto qualunque della medesima linea.

## Osservazione undecima.

Nelle quistioni trattate in questa parte si è sempre supposto conosciuta insieme alla direzione dei raggi di luce la linea obbiettiva, e si sono esposte le regole per delineare i contorni delle ombre corrispondenti. Se colla direzione dei raggi di luce fosse dato il contorno di esse ombre, e si volesse la linea obbiettiva, trovata la superficie cilindrica avente questo contorno per direttrice, e le rette generatrici paralelle ai raggi di luce, qualunque linea situata in essa superficie cilindrica potrebbe esprimere la dimandata obbiettiva; e se quest' obbiettiva dovesse essere in una data superficie, come succede generalmente negli spaccati, essa linea sarebbe la comune sezione di questa superficie data e della cilindrica anzidetta, la quale si delineerebbe conseguentemente colle stessissime regole che si userebbero per determinare lo stesso contorno, quando fosse data la medesima obbiettiva.

## Osservazione duodecima.

Così, se insieme al contorno dell' ombra portata sulle superficie considerate fosse data la linea obbiettiva, e si volesse l' opportuna direzione dei raggi di luce colle cose esposte, agevolmente si otterrebbe, come si comprenderà dai seguenti esempj.

Esempio primo. *Qual direzione dovranno avere i raggi di luce perchè l' ombra portata dalla periferia* fh – vnc (*tav. VI*, *fig.* 40) *sulla superficie cilindrica* fhLM – anp *sia la linea avente per ortografia la periferia ellittica* 5qx, *la quale ha il centro in* g, *punto di mezzo della* fh, *ed è tangente ad amendue le verticali* fM, hL?

Dal segamento *m* si tiri la *mt* perpendicolare all'asse *ML*, e dal punto *a* la *ae* paralella alla tangente della periferia *cnv* nel segamento *t*; indi tirisi *ex* paralella alla *mt*, e congiungasi il punto *f* all'*x*, ove la data periferia ellittica vien segata dalla *ex*; evidentemente saranno *ae*, *fx* l'icnografia e l'ortografia della retta *ae* − *fx* paralella ai raggi di luce.

Esempio secondo. *L'ortografia del contorno dell'ombra che accade nello spaccato ordinario di una volta emisferica è espressa* (*tav. VII*, *fig.* 59) *dalla semiperiferia ellittica* FHC *concentrica al cerchio* LBD, *ed avente per asse maggiore il diametro* FC *del cerchio stesso* LBD: *qual direzione avranno i raggi di luce?*

Condotta la corda *be* perpendicolare al diametro *CF*, si descriva la semiperiferia circolare *bge*, e si tiri *hg* pel segamento *h* e perpendicolare alla corda stessa *be*, ed uniscasi *bg*; la retta *be* esprimerà l'ortografia di una paralella ai raggi di luce, e *gbe* l'angolo fatto dalla medesima paralella col piano ortografico, cioè quello denominato Δ: l'icnografia di questa paralella ai raggi di luce si potrà avere colla regola esposta nel corollario della proposizione sciolta al paragrafo sesto della prima parte.

Se l'obbiettiva o sia la linea che cagiona l'ombra sarà una retta, infinite saranno evidentemente le direzioni che potranno avere i raggi di luce, giacchè sarà sufficiente che essi raggi siano paralelli ad una qualunque retta situata nel piano dell'obbiettiva e del contorno dell'ombra.

## Osservazione decimaterza.

Siccome l'obbiettiva ed il contorno dell'ombra portata debbono essere in una stessa superficie cilindrica involvente, perchè la quistione che ha per oggetto lo scoprimento della direzione dei raggi di luce non sia impossibile a soddisfarsi; così per tutte le quistioni di tal natura e delle quali non sarà anticipatamente nota la loro possibilità, come ho supposto che fosse negli esempj anzi esposti, bisognerà incominciare la loro soluzione col decidere la loro possibilità, ciò che si farà, per le superficie di cui ho parlato in particolare, colle stesse cose esposte relativamente alla delineazione delle ombre portate su di esse, ed in generale con quello che segue; e scoperto che esse proposizioni siano possibili, si passerà poi alla determinazione della direzione dei raggi di luce colle regole esposte tutte le volte che le superficie, su cui si renderà visibile l'ombra portata, saranno di quelle particolarmente considerate, ed in generale colla regola generalissima che trovasi alla fine della presente osservazione.

Supposto sempre le linee e le superficie riferite tutte ai medesimi tre assi coordinati rettangoli, siano

$$f(x', y', z') = 0, \phi(x', y', z') = 0$$

le equazioni della linea obbiettiva come sopra, e saranno

$$s - y' = \alpha(t - x'), u - z' = \beta(t - x')$$

le due della retta che passa per quel punto dell' obbiettiva al quale corrispondono le coordinate $x', y', z'$, ed è paralella all' altra tirata per l' origine delle coordinate, ed espressa dalle equazioni $y = \alpha x$, $z = \beta x$:

$x, y, z$ rappresentano le coordinate rettangole di un punto qualunque di quest' ultima retta, ed $r, s, u$ le analoghe della detta sua paralella.

Eliminando le tre coordinate $x', y', z'$ dalle prime quattro equazioni qui esposte, avrassi un' equazione

$$\Phi(t, s, u, \alpha, \beta) = 0,$$

la quale rappresenterà la superficie cilindrica avente le rette generatrici paralelle alla retta data dalle equazioni $y = \alpha x$, $z = \beta x$, e per direttrice la stessa obbiettiva.

Così, chiamando $x_,$, $y_,$, $z_,$ le coordinate di un punto qualunque della linea esprimente l' ombra portata, saranno

$$y - y_, = \alpha(x - x_,), z - z_, = \beta(x - x_,)$$

le due equazioni della retta paralella all' espressa dalle $y = \alpha x$, $z = \beta x$, e che passa pel punto della linea dell' ombra a cui corrispondono le coordinate $x_,$, $y_,$, $z_,$; e però eliminando $x_,$, $y_,$, $z_,$ dalle due equazioni $y - y_, = \alpha(x - x_,)$, $z - z_, = \beta(x - x_,)$ combinate colle due della linea dell' ombra portata, si otterrà un' equazione

$$\theta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

la quale esprimerà la superficie cilindrica, che ha per una direttrice l' ombra medesima e le rette generatrici paralelle anch' esse all' espressa dalle equazioni $y = \alpha x$, $z = \beta x$. Ma la possibilità della quistione richiede che la linea obbiettiva e quella dell' ombra portata siano in una medesima superficie cilindrica; adunque la quistione sarà possibile, se, mediante un' opportuna determinazione delle quantità $\alpha$, $\beta$, potransi ridurre identiche le due equazioni

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \theta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

risultanti dalle suddette eliminazioni; altrimenti sarà essa quistione assolutamente impossibile, o sia immaginaria.

Ora, i valori delle $\alpha$, $\beta$ che renderanno identiche queste due equazioni, posti in vece di $\alpha$, $\beta$ nelle due $y = \alpha x$, $z = \beta x$, faranno conoscere le equazioni della retta condotta per l' origine delle coordinate paralellamente alle rette generatrici della superficie cilindrica espressa da una delle equazioni

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \theta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

e per conseguenza la stessa direzione dei raggi di luce.

---

# PARTE QUARTA.

## DEI CONTORNI DELLE OMBRE COMPOSTE.

I contorni delle ombre composte essendo formati di più contorni di ombre proprie ovvero portate, ed in generale di quelli di cui ho parlato individualmente nelle parti precedenti, onde appoggiare le regole che userò per delinearli, mi limiterò a citare i luoghi ove dimostrai i differenti passi di esse; anzi, siccome queste citazioni sarebbero moltissime, per cui spiacerebbero, ne farò solamente alcune, quelle cioè che stimerò più utili particolarmente nelle costruzioni. Così, non potendo esporre tutte le proposizioni relative alla determinazione di essi contorni, come ho fatto per quelli delle ombre semplicemente proprie o portate, mi restringerò all' esposizione delle sole proposizioni seguenti, che scelsi fra quelle che interessano maggiormente i disegnatori.

### PROPOSIZIONE I.

*Data l'ortografia e l'icnografia della sagoma espressa dalla figura* 111, *tav. XI, trovare gli estremi delle ombre che accadono su di essa e di quella che essa medesima cagiona sul piano ortografico, nell' ipotesi che la luce abbia la direzione ordinaria.*

#### DELLE OMBRE CHE ACCADONO SULLA SAGOMA.

1. Si faccia l'angolo *cbx* semiretto, tirisi l'orizzontale *c*1, e sarà *xbc*1 l'ortografia dell' ombra portata sulla gola dalla listella avente *bxa* per ortografia.
2. Conducasi *de* paralella alla *bc* e tangente all' arco *dc*, e le orizzontali *d*2, *e*3, ed avrassi l'ortografia 2*de*3 dell' ombra che porta la gola sopra sè stessa e sulla listella sottoposta.
3. Tirisi *vf* paralella anch' essa alla *bc*, e l'*fs* orizzontale, e sarà 45*f*6 l'ombra portata sul muro dalla listella anzidetta.

#### DELL' OMBRA CAGIONATA SUL PIANO ORTOGRAFICO.

1. Si tirino le *cC*, *dD* perpendicolari alla *ML* asse comune ai soliti due piani coordinati, indi le *ag*, *bh*, *ci*, - - *Bo*, *Cs*, - -, che facciano angoli semiretti colla stessa *ML*.

2. Conducansi le verticali *ohg*, *tnm*, e dai segamenti *h*, *m*, *n* le orizzontali *hi*, *mr*, *n7*, e poi la verticale 78.
3. Si descriverà l' ombra *ri* portata dalla linea *cd* – *CD*, facendo per ciascun punto di quest' ultima linea ciò che si è fatto pel punto *B* – *a* onde avere *g*.

L' estremo dell' ombra qui richiesta sarà pertanto *aghirmn78*.

Osservazione. Se la sagoma fosse quella espressa dalla figura 114, condotta *cr* toccante l' arco *ac* e che faccia l' angolo semiretto colla *ML*, indi tirate le orizzontali *c7*, *r8*, sarà *7r* l' ortografia dell' ombra cagionata dal toro sopra sè stesso e sulla listella. Così menata *ef* paralella alla *cr*, nell' orizzontale *f9* avrassi l' estremo inferiore dell' ombra cadente sul muro.

Similmente, condotta *cv* perpendicolare alla *ML*, e le *a1*, *r3*, *e4*, *f5*, *vt*, *mx*, *n6*, le quali facciano anch' esse degli angoli semiretti colla *ML*, e la *a1* sia anche tangente all' arco *ac*, e poi tirate le verticali 65, *x43* ed unite le orizzontali 54, 32, ed in fine descritto l' arco 12, col fare per ciascun punto dell' arco *ac* — *vV* quello che si è fatto pel punto *f* — *n* onde avere il punto 5, si otterrà l' estremo *a123456* dell' ombra portata dalla sagoma sul piano ortografico.

## PROPOSIZIONE II.

*Data l' ortografia e l' icnografia della sagoma che esprime la figura* 115, *tav. XII*, *descrivere l' ortografia dell' ombra che cagiona sopra sè stessa, e quella portata sul piano ortografico, qualunque sia la direzione della luce.*

### DELL' OMBRA CHE ACCADE SULLA SAGOMA.

1. Si faccia l' angolo *ca3* eguale al complemento di Γ, tirisi la retta *ab* paralella alla *O*, e l' orizzontale *cbb*; e sarà *dbb* l' ortografia dell' estremo inferiore dell' ombra che accadrà sul guscio.
2. Così tirinsi le *ef*, *eg*, *gfh* rispettivamente paralelle alle *ab*, *ac*, *bb*, e si avrà in *ifh* l' ortografia del contorno inferiore dell' ombra portata dal guscio sul muro sottoposto.

Osservazione. Se il punto *d* cadrà in *c* o sotto del medesimo, l' estremo *dbb* si ridurrà alla sola retta orizzontale *cb* tirata pel punto *c*: altrettanto si dirà del punto *i* rispetto al *g*.

### DELL' OMBRA PORTATA SUL PIANO ORTOGRAFICO.

1. Si tirino le *tn*, *zp*, *bm*, $x\theta$, *hq* paralelle tutte alla *O*, e le *Zs*, *Xy* alla *I*, e le verticali *spn*, $y\theta$, indi le orizzontali *pm*, $\theta q$, e la verticale *qr*; e saranno *tn*, *np*, *pm*, $\theta q$, *qr* altrettante parti del contorno dell' ombra richiesta.
2. Si conduca la *bB* perpendicolare all' asse *ML*, e descrivasi l' ombra $\theta m$ portata dalla linea *BX* – *bx*, facendo per ciascun punto *B* – *b* ciò che ho fatto pel punto *t* – *Z* per avere l' *n*.

L' ombra qui dimandata sarà dunque $tnpm\theta qrax$.

## PROPOSIZIONE III.

*Trovare l'ortografia e l'icnografia dell'ombra che porta sopra sè stessa la base toscana (fig 116) con una porzione del fusto della colonna della parte non rastremata, non che i contorni delle ombre portate da essa sui piani ortografico ed icnografico, nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione che fissano generalmente i disegnatori.*

Sia *ML* la solita linea comune ai piani ortografico ed icnografico, ed *S — sx* l'asse della base stessa.

### DELL' OMBRA CHE LA BASE PORTA SOPRA SÈ STESSA.

1. Uniscasi la *SBAI*, e si tiri la verticale *ab*, che passi, estesa, pel segamento *B*: la retta *ab*, avente il termine *b* nella periferia ove incomincia l' imoscapo, esprimerà l' ortografia dell' estremo dell' ombra propria della porzione suddetta del fusto della colonna.
2. Conducasi *BCP* perpendicolare alla *BS*, e pel segamento *C* la *Cc* parallella alla *Bb*, ed avransi in *B – b*, *C – c* i termini dell' ortografia del contorno dell' ombra portata sull' imoscapo da una porzione della retta *B – ab*: l' icnografia di questo contorno sarà la stessa retta *BC*, e l' ortografia la linea *bc* descrivibile col corollario quinto della proposizione trentesimottava della parte terza.
3. Pel segamento *D* tirisi *Ded* paralella alla *Bb*, e la sua parte *ed* sarà l' ortografia dell' estremo dell' ombra propria della listella.
4. Si faccia *ej* eguale alla *ed*, e si tirino le *DJ*, *St* paralelle alla *BC* ed eguali alla *dj*, indi si descriva l' arco *JF* col centro *t*; la retta *DJ* sarà l' icnografia dell' ombra portata dalla retta *D – de* sull' anello orizzontale avente l' ortografia nella retta *ef*, e l' arco *JF* sarà quella dell' ombra portata sul medesimo anello da una porzione dell' arco che ha l' ortografia nella retta *dc*.

   Osservazione. L' ortografia dell' estremo dell' ombra che ha l' icnografia nella linea *DJF* è invisibile, perchè trovasi in un piano orizzontale.
5. Si tiri *Ff* paralella alla *Bb*, e la *cg* alla *dj*, e si descriva sì l' ortografia *fg* che l' icnografia *FG* dell' ombra portata sul toro da una porzione dell' arco *CD – cd*, proposizione trentesimaquarta della parte terza: l' arco che cagiona quest' ombra è quello la cui ortografia ha un termine in *c*, e l' altro nel segamento della *cd* e della paralella alla *jd* tirata pel punto *f*.
6. Collo stesso corollario quinto della proposizione suddetta descrivasi, incominciando in *g*, l' ortografia *gh* dell' ombra portata sul toro da una parte della retta *B – ba*; l' icnografia sarà *GH* porzione del prolungamento della stessa retta *BG*.

7. Si delinei $hp$ ortografia, ed $AH$ icnografia dell' estremo dell' ombra propria del toro colla regola esposta nella proposizione settima o nella osservazione quarta della proposizione decimaquarta, ambe della seconda parte; e si estenda l' icnografia sino ad incontrare la $BH$, e l' ortografia la $gh$, ovvero la $Hh$ perpendicolare alla $LM$.
8. Finalmente si tiri $nu$ paralella alla $O$, $uU$ perpendicolare alla $ML$, ed $UN$ paralella alla $I$, e sarà $N$ un termine dell' icnografia dell' ombra $AN$ portata sul plinto da una porzione della - - $UA - up$, la quale si descriverà agevolmente, parte terza, proposizione seconda, osservazione prima.

L' ortografia e l' icnografia richieste saranno adunque le linee - - *abcdefghp* - -, - - *BCDJFGHAN* - - .

Osservazione 1. Taluni credono che la linea $BC - bc$, estremo dell' ombra cadente sull' imoscapo, debba essere sempre composta di tre parti appartenenti a curve di differenti specie, cioè la superiore appartenente all' estremo dell' ombra propria dell' imoscapo, la intermedia alla linea che rappresenta l' ombra portata da questa prima parte sullo stesso imoscapo, e la terza ed ultima all' ombra portata sul medesimo dalla retta $B - ab$; di modo che, secondo loro, si dovrebbero descrivere sempre in vece delle linee $BC$, $bc$ due altre composte ambedue di tre parti di linee di differenti specie, e di cui le sole ultime di queste parti, cioè quelle aventi l' una un termine in $C$, e l' altra in $c$, cadrebbero nelle due $BC$, $bc$ sopra descritte. Per dimostrare l' insussistenza di questa opinione, e che le linee $BC$, $bc$ sono nel caso nostro rigorosamente l' una l' icnografia e l' altra l' ortografia del termine dell' ombra cadente sull' imoscapo, come ho asserito sopra nel numero secondo, incomincerò a trovare l' equazione dell' icnografia del contorno dell' ombra propria del guscio dell' imoscapo medesimo, giacchè mi valgo di essa.

Pongasi (tav. III, fig. 16) $CG = r$, $CO = a$, $MCQ = \alpha$, e si avrà

$$CH = CG\sqrt{2} = r\sqrt{2},\ nH = CH\ sen.\ \alpha = r\sqrt{2}\ sen.\ \alpha,\ \ tang.\ CGr = \frac{Cr}{CG} = \frac{Cn}{CG} = \sqrt{2}\ sen.\ \alpha,$$

$$Gt = Gs\ cos.\ CGr = r : \sqrt{(1 + 2\ sen.^2\ \alpha)};$$

e però, supposto anche $SD = a$, $DB = r$ (fig. 116), e nominato $R$ il raggio vettore della icnografia del contorno dell' ombra propria dell' imoscapo, che fa colla stessa retta $SD$ l' angolo $\alpha$, l' equazione dimandata sarà

$$R = a - r : \sqrt{(1 + 2\ sen.^2\ \alpha)}.$$

Così, nominata $x$ la parte della $SD$, intercetta fra $S$ ed il piede della perpendicolare tirata alla medesima dal punto a cui corrispondono le coordinate $R$, $\alpha$, si avrà

$$x = a\ cos.\ \alpha - r\ cos.\ \alpha : \sqrt{(1 + 2\ sen.^2\ \alpha)}$$

per essere la medesima parte eguale evidentemente ad $R\ cos.\ \alpha$.

Eguagliando a zero il valore di $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)$ desunto da questo della $x$, si ha l'equazione

$$\frac{\left(1 + 2\ sen.^2\ \alpha\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3r}{a}}{\left(1 + 2\ sen.^2\ \alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\ sen.\ \alpha = 0,$$

la quale, stante che per la base toscana $3r$ è minore di $a$, non può essere soddisfatta che dal fattore $sen.\,\alpha = 0$, il quale dà $x = a - r$, e

$$\left(\frac{d^2x}{d\alpha^2}\right) = -a + 3r,$$

cioè il differenziale secondo negativo. Ma i valori dell' $\alpha$, che annullano $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)$ e rendono negativo quello di $\left(\frac{d^2x}{d\alpha^2}\right)$, corrispondono al massimo valore della $x$; adunque $a - r$, che è il valore della $x$ corrispondente a $sen.\,\alpha = 0$, sarà la massima ascissa dell' icnografia dell' ombra propria dell' imoscapo.

Quindi tanto questa linea, quanto l' ombra che porterebbe la sua parte superiore sull' imoscapo, cadrà dalla banda della retta $BC$, in cui vi è il centro $S$, vale a dire in uno spazio totalmente ombreggiato dal fusto della colonna, e conseguentemente l' estremo dell' ombra in quistione sarà la linea $BC - bc$, cioè quella avente per icnografia la retta $BC$, e per ortografia la linea $bc$, siccome ho asserito.

Osservazione 2. Si nomini $p$ la perpendicolare tirata dal punto $F$ alla $SZ$, e $q$ la porzione di questa intercetta fra la stessa $p$ ed il punto $S$.

Gli archi $ZF$, $JF$ danno

$$p^2 + q^2 = \overline{SF}^2,\ (p - St)^2 + q^2 = \overline{tF}^2;$$

e però sarà $p^2 - (p - St)^2 = \overline{SF}^2 - \overline{tF}^2$, o sia $p = \dfrac{\overline{SF}^2 + \overline{St}^2 - \overline{tF}^2}{2St}$;

ma per la base toscana ordinaria, se $SB = 12$, si ha $BD = \frac{3}{2}$, $DZ = \frac{1}{2}$, e la $de = 1$; e però $SD$ o sia $tF = 13\frac{1}{2}$, $St = de \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$, ed $SZ$ ovvero $SF = 14$; adunque sarà

$$p = \frac{196 + 2 - 182\frac{1}{4}}{2\sqrt{2}} = \frac{63}{16}\sqrt{2}.$$

Ponendo nell' equazione $p^2 + q^2 = \overline{SF}^2$ in vece di $p$, $SF$ i loro valori, e liberando la $q$, si ottiene

$$q = \frac{1}{16}\sqrt{42238},$$

quantità la quale per essere maggiore di $SB$ insegna che il segamento $F$ cade fra il punto $Z$ e la retta $BH$; quindi, siccome la $DJ$ o sia $St = \sqrt{2}$ è minore di

$$\sqrt{(\overline{SZ}^2 - \overline{SD}^2)} = \sqrt{14{,}25},$$

così l' ombra portata dall' arco $DC - dc$ cadrà parte sul piano dell' anello orizzontale, che ha $fe$ per ortografia, e parte sul toro; appunto come ho tacitamente ammesso nei numeri quattro e cinque.

Osservazione 3. Nel numero sesto avendo descritta la linea $gh$ come ortografia dell' ombra portata sul toro dalla retta $B - ba$, ho supposto qui pure tacitamente che la linea paralella all' ordinaria direzione della luce, e tirata pel punto $C - c$, incontrasse la parte della superficie del toro che è figurata nella sua ortografia, e superiormente all' estremo $ph - AH$ della sua ombra propria: queste due ipotesi sono anch' esse conformi alla verità, giacchè la retta $ST$ paralella alla $ML$ è maggiore della $SA$, e la distanza fra la verticale $B - ba$ ed il punto dove la superficie del toro è incontrata la prima volta dalla paralella all' ordinaria direzione della luce, e che passa pel punto $C - c$, è minore della retta $BH$.

Di fatto, per le dimensioni ordinarie della base toscana, ammesso ciò che ho detto nella osservazione antecedente, si ha $ZA = \frac{5}{2}$, e però $SB\sqrt{2}$ o sia $ST = 12\sqrt{2}$, $SA = 16\frac{1}{2}$; ma $12\sqrt{2}$ è maggiore di $\frac{33}{2}$, giacchè 288 quadrato di $12\sqrt{2}$ è maggiore di $272\frac{1}{4}$ quadrato di $16\frac{1}{2}$; adunque ha luogo, come ho supposto, la prima delle dette due ipotesi.

Per dimostrar l' altra, s' immagini la periferia orizzontale che ha il raggio eguale ad $SZ + \frac{2}{3}\, ZA$, cioè a $\frac{47}{3}$, ed è situata nella superficie del toro superiormente al piano orizzontale che sega la superficie stessa in due parti eguali: il piano di questa periferia sarà incontrato dalla retta $B - ba$ nel punto che ha per icnografia $B$, e dalla detta parallella ai raggi di luce in un punto che avrà l' ortografia nella stessa $BT$, e la cui distanza dal $B$ stesso sarà eguale alla $BC$, o sia

$$\sqrt{(\overline{SD}^2 - \overline{SB}^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{153}\,,$$

insieme all' altezza cha ha il punto $C - c$ sul piano orizzontale medesimo moltiplicata per $\sqrt{2}$, cioè sarà eguale ad

$$\frac{1}{2}\sqrt{153} + \left(de + AZ - \frac{AZ}{3}\sqrt{5}\right)\sqrt{2} =$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{153} + \frac{7}{2}\sqrt{2} - \frac{5}{6}\sqrt{10}\,,$$

quantità minore di 10; e l' icnografia della stessa periferia segherà la $BH$ ad una distanza dal medesimo punto $B$ eguale a

$$\sqrt{\left\{\left(SZ + \frac{2}{3}\, ZA\right)^2 - \overline{SB}^2\right\}} = \sqrt{\left(\frac{47^2}{3^2} - 12^2\right)} = \frac{1}{3}\sqrt{1013}\,,$$

quantità maggiore di 10. Quindi la prima di queste due distanze sarà minore della seconda.

Ma la distanza fra la verticale $B - ba$ ed il primo incontro della suddetta paralella ai raggi di luce è evidentemente minore della prima di queste due distanze; ed all' opposto le distanze fra il punto $S$ e quelli dell' icnografia $AH$ intercetti fra il punto $A$ e la retta $ST$ sono esse maggiori di

$$SZ + \frac{ZA}{\sqrt{2}}, \text{ e molto più di}$$
$$SZ + \frac{2}{3}\, AZ = \frac{47}{3}\,,$$

e però della seconda delle medesime due distanze. Adunque la distanza fra la retta $B - ab$ ed il primo incontro della paralella all' ordinaria direzione della luce, e che passa pel punto $C - c$, sarà anch' essa minore della $BH$; ciò che volevasi dimostrare.

### DELL' OMBRA PORTATA SUL PIANO ICNOGRAFICO.

Si trovino le linee $IK$, $KE$ esprimenti le ombre portate dalle rette $I - in$, $IN - n$, la $EO$ portata dalla curva $UH - uh$, la $OP$ che porta la parte superiore della retta verticale $B - ab$; indi si tiri $Pr$ perpendicolare alla $OP$ ed eguale alla $SB$, e col centro $r$ si descriva il quadrante circolare $PQ$--; la linea $IKEOPQ$ rappresenterà l' estremo dell' ombra di cui si parla.

Osservazione. L' ombra che cadrebbe al di là della retta $Sr$, egli è evidente che sarebbe eguale perfettamente all' anzidescritta; quindi facilissimamente descrivibile.

### DELL' OMBRA CHE PORTA LA STESSA BASE SUL PIANO ORTOGRAFICO.

Determininsi le rette 65, 54, 32, l' arco ellittico 21 e la curva 43, che esprimono le ombre portate dalle rette $I-in$, $IN-n$, $A-ba$, dall'arco circolare $azm-BM$, e dalla curva $UH-uh$; e si avrà nella 654321, composta di esse parti, l' ombra qui richiesta.

Concludesi pertanto che nel piano ortografico si dovrà ombreggiare lo spazio

$$654321zabcdefghpni--,$$

e nell' icnografico

$$QPOLEKINAHGFJDCBM--;$$

ammesso sempre che questi piani siano affatto staccati l'uno dall' altro, giacchè se fossero uniti, come nella figura che si ha sott' occhio, si ombreggerebbe dell' ortografico la sola parte superiore alla $ML$, e dell' icnografico l' inferiore alla medesima, siccome è evidente.

## PROPOSIZIONE IV.

*Descrivere i contorni delle ombre che l'abaco porta sull'ovolo, e l'ovolo sopra sè stesso.*

Sia $DEKP$ ( fig. 117 ) l' ortografia dell' ovolo, $AQB$ quella dell' abaco posto sull'ovolo medesimo; cioè $AEPQB$ esprima l' ortografia dell' abaco e dell' ovolo, uniti fra loro, come si trovano comunemente, e sia disegnata quest' ortografia nel piano che passa per l' asse di rotazione dell' ovolo medesimo.

### DELL' OMBRA CHE PORTA L' ABACO SULL' OVOLO.

Si conduca $SR$ asse dell' ovolo, si faccia l' angolo $SAR$ eguale a quello compreso da una delle facce orizzontali dell' abaco e dal piano paralello ai raggi di luce e che passa per lo spigolo dell' abaco stesso, che ha per ortografia $AQ$, vale a dire al complemento di $\Gamma$; conducansi le rette $F1$, $G2$, $H3$, - - paralelle alla $AQ$, e coi centri $L$, $M$, $N$, - - e raggi $Fl$, $Gm$, $Hn$, - - si descrivano gli archetti circolari $p$, $q$, $r$, - -, prendansi le rette $l1$, $m2$, $n3$, - - eguali rispettivamente alle $lp$, $mq$, $nr$, - -, ed i punti 1, 2, 3, - - apparterranno all' ortografia $b2ce$ del contorno dell' ombra portata dall' abaco $ASQ$ sull' ovolo sottoposto $DEP$, qualunque sia la direzione dei raggi di luce e la linea $DFE$.

Sebbene questa regola sia un' applicazione del corollario quarto della proposizione trentesimottava della terza parte, nulladimeno espongo la seguente dimostrazione di essa per renderla affatto indipendente da qualunque altra.

S' immagini il piano orizzontale lungo la retta *G2*, la sezione di esso piano e dell' ovolo sarà un circolo che ha il centro in *m* ed il raggio eguale alla *Gm*.

La periferia di questo circolo orizzontale segherà in due punti l' estremo dell' ombra che porta l'abaco sull' ovolo: alla determinazione delle ortografie di questi due segamenti dirigerò particolarmente i ragionamenti che seguono.

Essendo questi due segamenti e nel piano del cerchio orizzontale ed in quello parallello ai raggi di luce, e che passa per lo spigolo dell' abaco avente *AQ* per ortografia, la corda che gli unisce sarà nella sezione di questi due piani, e per conseguenza paralella allo stesso spigolo dell' abaco, perchè le sezioni che un piano fa a due altri fra loro paralelli, come sono qui gli orizzontali della faccia superiore dell' abaco e del cerchio orizzontale, sono rette paralelle; ed essendo lo spigolo dell' abaco paralello alla sua ortografia *AQ* al pari delle rette *G2*, - -, la corda medesima sarà paralella anch' essa a questa retta *F2*, per esserlo allo spigolo stesso.

Sia unito con una retta il punto di mezzo della corda al centro *m*, e questa risulterà perpendicolare alla corda stessa ed alla sua paralella *G2*, e però anche al piano dell' ortografia, essendo essa retta nel piano del cerchio orizzontale.

Questa retta, che congiunge il punto di mezzo della corda al centro, risultando perpendicolare al piano ortografico, insegna che il punto *m* esprime l' ortografia del punto di mezzo della corda medesima. Ma la corda debbe avere la sua ortografia nella retta G2, ed eguale a sè stessa, essendo essa corda nel piano del cerchio orizzontale e paralella alla *G2*; adunque le ortografie de' suoi termini cadranno nella *G2*, e ad una distanza dal punto *m* eguale alla metà della corda medesima.

Il quadrato di ciascuna di queste due distanze eguagliando quello della metà della corda, sarà, come lo è quello della metà di questa corda, eguale al quadrato del raggio del cerchio orizzontale, meno quello della retta che unisce il suo centro al punto di mezzo della corda stessa; vale a dire i due punti comuni alla periferia del cerchio orizzontale ed al contorno dell' ombra in quistione, cioè i due suddetti segamenti, hanno le loro ortografie nella retta *G2*, e ad una distanza dal punto *m*, il cui quadrato eguaglia quello del *G2*, raggio del cerchio orizzontale, meno il quadrato della retta che unisce il centro del medesimo cerchio al punto di mezzo della sua corda avente i termini nei medesimi segamenti.

Immagino ora un secondo piano perpendicolare alla *AQ*, e che passi per l' asse *SR*, le sezioni di questo piano coi quattro dell' ortografia, del cerchio orizzontale, della faccia superiore dell' abaco e di quello paralello ai raggi di luce e che passa lungo lo spigolo dell' abaco, e che ha *AQ* per ortografia, costituiranno evidentemente un trapezio, i cui lati paralelli saranno le due rette tirate pei punti *S* ed *m* perpendicolarmente al piano ortografico, e conseguentemente perpendicolari anche all' asse *RS* dell' ovolo.

Il secondo di questi due lati paralelli, cioè quello che ha un termine in *m*, è evidentemente la stessissima retta che congiunge il centro del cerchio orizzontale al punto di mezzo della sua corda suddetta.

Il piano qui immaginato sarà perpendicolare a quello spigolo dell' abaco avente la retta *AQ* per ortografia, per esserlo alla *AQ* medesima; e però l' angolo del trapezio opposto all' altro suo avente il vertice in *m* sarà lo stesso angolo *diedro* compreso dal piano inferiore dell' abaco e da quello paralello ai raggi di luce passante per l' anzidetto spigolo dell' abaco medesimo; quindi quest' angolo del trapezio eguaglierà anch' esso l' *MAS*.

Questo trapezio, col rotare attorno al suo lato *Sm*, si adatti al piano *ASG*; ed i suoi lati paralelli, per essere perpendicolari all' asse *Sm* di rotazione, cadranno secondo le rette *AS*, *mG* perpendicolari alla stessa *Sm*; ed essendo il punto *S* nell' asse dell' ovolo, il lato del trapezio trovantesi nel piano inferiore dell' abaco sarà eguale alla metà di *AQ*; e però il vertice di quell' angolo del trapezio, il quale è opposto all' altro

angolo del medesimo avente il vertice in $m$, cadrà precisamente in $A$; e per essere il medesimo angolo eguale alla $MAS$, come si è dianzi veduto, l' altro suo lato cadrà secondo la retta $AM$; e però il trapezio di cui si è parlato sino ad ora, e l' altro $AMmS$, coprendosi, saranno perfettamente eguali; quindi il lato $Mm$ di quest' ultimo eguaglierà quello dell' altro che ha un termine in $m$, e l' altro nel punto di mezzo della corda del cerchio orizzontale sovra nominata.

Ora il triangolo $Mmq$ rettangolo in $m$ dà il quadrato della $mq$ eguale a quello della $Mq$ meno quello della $Mm$; e perciò in virtù della costruzione sarà il quadrato di una delle rette $m2$ eguale a quello della $Mq$ o sia $Gm$ meno quello della $Mm$, cioè al quadrato del raggio del cerchio orizzontale meno quello della retta che unisce il centro del medesimo cerchio al punto di mezzo dell' anzidetta sua corda; e pertanto 2, 2 saranno le ortografie dei due punti dell' estremo dell'ombra in quistione, nei quali è desso segato dalla periferia anteriore del cerchio orizzontale che ha il centro in $m$ ed il raggio eguale alla $Gm$.

Ma quanto ho detto di questi due punti del contorno dell' ombra portata dall' abaco sull' ovolo vale indistintamente per tutt' i punti del contorno medesimo; adunque i punti 1, 1, 2, 2, 3, 3, -- determinati colla regola esposta appartengono, come ho superiormente dichiarato, all' ortografia $b2k3c$ del contorno dell' ombra che porta l' abaco sull' ovolo; ciò che volevasi dimostrare.

Osservazione. Tutto ciò che ho qui esposto e dimostrato rispetto all' ortografia del contorno dell' ombra che porta l' abaco sull' ovolo, nell' ipotesi dei raggi di luce paralelli, si estende anche al caso molto più generale dei raggi di luce concorrenti ad un punto, purchè al piano paralello ai raggi di luce e che passa lungo lo spigolo dell' abaco avente per ortografia $AQ$ s' intenda sostituito quello il quale passa per lo spigolo medesimo e pel punto a cui concorrono i raggi stessi: sostituzione che non apporta cambiamento veruno nè alla regola, nè alla dimostrazione qui data di essa.

Si concluda pertanto che la regola esposta vale, siano i raggi di luce o paralelli o concorrenti, e qualunque sia la linea $DGE$ generatrice della superficie dell' ovolo, e che con essa trovansi i punti del contorno dell' ortografia dell' ombra portata dall' abaco sull' ovolo senza descrivere veruna icnografia, ciò che lo rende pregevolissima.

Quando i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, l' angolo $MAS$ o sia il complemento di $\Gamma$ sarà semiretto, e però per sè stesso determinato. In questa medesima ipotesi i punti 2, 2 saranno nell' arco circolare avente il centro in $R$ segamento delle rette $AR$, $RS$, ed il raggio eguale alla $Gm$; i due 3, 3 nell' arco che ha il centro nel medesimo punto $R$, ed il raggio eguale alla $Hn$, ecc.: questa regola, ammirabile per la sua semplicità, risulta dal corollario quarto della proposizione ultimamente citata.

## DELL' OMBRA CHE PORTA L' OVOLO SOPRA SÈ STESSO.

La superficie curva dell' ovolo essendo la porzione di quella di un toro compresa fra due piani paralelli alle facce piane dello stesso toro, le regole esposte e dimostrate per determinare l' ortografia del contorno dell' ombra propria di questo serviranno anche per trovare l' ortografia $abcd$ del contorno dell' ombra che porta l' ovolo sopra sè stesso.

Osservazione. Disegnata la curva $b2k3c$, e tirata per $A$ la retta paralella alla $O$, basterà descrivere del contorno in quistione la parte $bc$ e la $af$ compresa fra il punto di contatto $a$ e questa retta medesima; giacchè le rimanenti due parti del contorno dell' ombra propria del toro saranno evidentemente coperte dall' ombra portata dall' abaco sull' ovolo medesimo.

Similmente, siccome la parte della linea $b2k3c$ cadente sotto $bc$ descriverebbesi inutilmente, e cadono sicuramente sotto la curva $bc$ tutti i punti della $b2k3c$ che hanno dalla $AP$ una distanza maggiore di quella che possono avere da essa $AP$ i punti dell' ortografia

*abcd*; così l' ultima delle rette $F1$, $G2$, $H3$, -- dovrà essere quella avente dalla medesima $AP$ una distanza al più eguale alla massima che avranno i punti della curva *abcd*.

Nell' ipotesi ordinaria rispetto alla direzione della luce il quadrato di $LJ$ (tav. III, fig. 16), cioè della massima distanza che possono avere dal piano icnografico i punti dell' ortografia del contorno dell' ombra propria del toro, è eguale al doppio di quello della corrispondente $GJ$; e però condotta pel punto di mezzo dell' arco $DaE$ (fig. 117) la perpendicolare al prolungamento della $EK$, e congiunto il punto d' incontro loro al centro dell' arco stesso, e dal segamento di quest' ultima retta e dall' arco medesimo $DaE$ tirata la paralella alla $AQ$, sarà questa evidentemente la retta più distante dalla $AP$, che fra le paralelle $F1$, $G2$, $H3$, -- dovrassi condurre per determinare i punti della curva $b2k3c$.

In questa medesima ipotesi, risultando l' angolo $MAS$ semiretto, il suo lato $AM$ coinciderà colla suddetta paralella alla $O$ tirata pel punto $A$; più le parti del contorno in quistione che hanno per ortografia *be*, *af*, essendo evidentemente eguali fra loro, descritta che si avrà l' ortografia *bc* e l' icnografia corrispondente, con una delle regole esposte, parlando dell' ombra propria del toro, delineerassi l' ortografia *fa* facilissimamente coll' osservazione seconda della proposizione settima della seconda parte.

## PROPOSIZIONE V.

*Trovare l' ortografia del contorno dell' ombra che il capitello toscano (fig. 118) porta sopra sè stesso, e l' estremo dell' ombra portata dal medesimo sul piano ortografico, nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.*

Sia $ML$ l' asse comune ai piani ortografico ed icnografico, e $B - b4$ l' asse del capitello medesimo.

### DELL' OMBRA CHE PORTA SOPRA SÈ STESSO.

1. Si determini $5y\alpha$ ortografia dell' ombra che porta la cimasa sull' abaco, non che le linee $h4u$, $ahu$, $AHU$ esprimenti i contorni delle ombre portate dall' abaco sull' ovolo, e dall' ovolo sopra sè stesso, proposizione antecedente.
2. Nell' asse del capitello si prenda $3b = BM$, e col centro $b$ e col raggio $3b$ descrivasi l' arco $de$ intercetto fra l' orizzontale $dn$ e l' $he$ tirata dal segamento $h$ paralellamente alla $O$. Così si seghi $nc = BP$, col centro $c$ e col raggio $cn$ facciasi l' arco $gl$ intercetto fra il prolungamento della $im$ e la $dl$ paralella anch' essa alla $im$ ovvero alla $O$, passante pel segamento $d$. Quando sarà $MP = n3$, il punto $c$ cadrà in $b$.
3. Facciasi l' angolo $CBL$ semiretto, tirinsi $QT$ tangente la periferia $QP$, le $Qq$, $Tt$ paralelle alla $Bn$, e dal segamento $t$ la $tq$ paralella alla $O$, e si otterrà il punto $q$.

4. Si descriva l'ortografia $e\lambda$ dell'ombra portata sulla listella $\mu k$ da una parte della linea $HS---hs--$, osservazione seconda, proposizione sesta, parte terza; indi si tiri $s\lambda r$ paralella alla $O$, ed $sS$, $rR$ alla $B4$; e trovinsi le linee $lr$, $rq$ ortografie delle ombre portate sul fregio dall'arco circolare $d\lambda---NC$ e dalla linea $ST-st$, osservazione anzi citata.
5. Tirinsi dai segamenti $e$, $l$, $k$, $j$ le rette $em$, $l\theta$, $k\mu$, $j\xi$ paralelle tutte alla $f\lambda$, ed avransi i punti $m$, $\theta$, $\mu$, $\xi$.

Sebbene gli archi $\mu m$, $\theta\xi$ si possano con facilità descrivere esattamente, per essere i profili degli stessi archi aventi $ek$, $lj$ per ortografie; ciò non ostante si potranno figurare colle due rette che uniscono i loro termini, perchè sono cortissimi.

Osservazione. Condotte $MA$, $PN$ paralelle alla $I$, le $Aa$, $N2$ alla $B4$; indi le $a\mu$, $2\xi$ alla $O$, avransi immediatamente i punti $\mu$, $\xi$ senza descrivere le linee $e\lambda$, $lj--$.

Concludesi pertanto che i contorni dell'ombra cadente sulla listella sottoposta all'ovolo saranno $--\mu mf--$, $--dek\lambda$, e quelli dell'ombra che cade sul fregio del medesimo capitello $--\xi\theta glrqp--$.

## DELL' OMBRA PORTATA SUL PIANO ORTOGRAFICO.

Pei segamenti $y$, $u$ siano tirate le $yz$, $uv$ paralelle alla $O$; per gli $u$, $v$ le $uU$, $vV$ paralelle alla $4B$, e pel punto $X$ la $XZ$ alla $I$.

Le linee che portano gli estremi di quest' ombra sono $YL-\beta$, $Y-\alpha\beta$, $Zy-z\alpha$, $X-yx$, $VX-vx$, $UT-ut$, $Q-qp$, $PRQ-7p$: le ombre portate dalle prime cinque e dalla penultima determineransi colla regola già più volte usata; e quelle cagionate dalle $UT-ut$, $PRQ-7p$ mediante l'osservazione prima della proposizione seconda della parte antecedente.

Osservazione. Vi sono dei capitelli toscani, le cui parti sono tali che l'ombra cagionata dall'ovolo cade interamente sul fregio; ve ne sono degli altri, pei quali l'ombra medesima è portata porzione sul fregio, e porzione sulla listella sovrapposta ad esso; ed alcuni se ne trovano, in cui si verifica quanto ho supposto tacitamente nella soluzione della proposizione proposta, pei quali cioè l'ombra portata dall'ovolo e dall'abaco cade parte sulla listella, parte sul fregio, e parte sul piano ortografico. Per delineare i contorni di queste ombre, qualunque sia per essere il caso che possa succedere, si potranno incominciare le operazioni, come se dovesse aver luogo il terzo, quello cioè da me estesamente considerato; giacchè dalle operazioni necessarie per questo si concepirà agevolmente non solo quale di essi effettivamente avrà luogo, ma anche le poche modificazioni che dovransi fare alle regole stesse onde avere il contorno richiesto.

---

## PROPOSIZIONE VI.

*Conoscendosi le ortografie* rEFn, MBCL (*tav. XIII, fig.* 119) *e le icnografie* RNLM, AHD *di una listella e di una goccia conica unite insieme, come si trovano ordinariamente, descrivere nel piano ortografico la linea* abcdeAfgh, *le cui parti* ab, Af, fg, gh *sono gli estremi dell' ombra portata sul piano medesimo dalla listella e dalla goccia, e le due* cd, de *rappresentano, la prima l'ortografia dell' ombra che porta la listella sulla goccia, e l'altra quella dell' ombra propria della goccia stessa.*

Sia *I — iQ* l'asse della goccia, ed *ML* il solito comune ai due piani coordinati.

1. Si determini la retta *ed* esprimente l' ombra portata dalla goccia sopra sè stessa, osservazione quinta, proposizione undecima, parte seconda.
2. L'ombra *fg* portata dalla stessa *HI — ed* sul piano ortografico, corollario primo, proposizione undecima, parte terza.
3. Trovisi la retta *abgh*, che esprime l'ombra portata dallo spigolo *RN — rn* della listella, osservazione seconda, proposizione ultima citata.
4. Dal segamento *g* si tiri *gd* paralella alla *O*, e si avrà nel segamento *d* di essa colla *de* l' altro termine dell'ortografia *ed* dell'ombra propria della goccia.
5. Si faccia *PQ* eguale all' aggetto della retta *RN — rn* dall' asse della goccia, l'angolo *QPm* eguale al complemento di Γ; tirisi la *mc* perpendicolare alla *Qi*, e si avrà il termine *c*, l' altro essendo in *d* dell'ortografia dell' ombra che porta la listella sulla goccia, la quale si descriverà facilmente, qualunque sia la direzione dei raggi di luce, colla regola esposta nel corollario quarto della proposizione trentesimanona, o coll' osservazione seconda della medesima proposizione, parte terza.
6. Finalmente descrivasi l' arco ellittico *Af*, cioè l'ombra portata sul piano ortografico dall' arco circolare *ML — AHD*, osservazione prima, proposizione seconda, parte terza; e la linea *abcdeAfgh*, così determinata, sarà la richiesta nella proposta proposizione.

Osservazione. Nell' ipotesi ordinaria rispetto alla direzione della luce, tirando pel punto *H*, ed a destra di esso l' orizzontale eguale alla verticale *eH*, nell' altro termine di questa orizzontale si avrà il punto *f*; e però unendo questo termine al punto ove concorrono le rette *MB*, *iQ*, *LC*, si otterrà immediatamente la *fg*. Nella medesima ipotesi, facendo per tutt' i punti dell' arco circolare *AH* ciò che si è qui fatto per l'*H*, otterransi i punti dell' arco ellittico *Af*; così si potrà descrivere l' arco ellittico *cd* anche colla regola semplicissima esposta alla fine del corollario quarto della proposizione trentesimottava, parte terza.

## PROPOSIZIONE VII.

*Trovare l' ortografia dell' ombra che accade sul pezzo di cornice dorica espressa dalla figura 120, tav. XII.*

Il piano ortografico sia quello del fregio, e la $ML$ al solito la linea comune a questo piano ed all' icnografico, e la parte della figura che trovasi sotto di questa retta esprima l' icnografia del triglifo.

1. Si faccia l' angolo $abc$ eguale al complemento di $\Gamma$, e dai segamenti $d, e, c, \alpha$ si tirino $dfghvx$, $e1234$, $ciim$ ed $\alpha\beta\beta$ orizzontali, e congiungansi le $i1$, $i2$, - -, ed avrassi nella linea $cdf1ii$, - - l' estremo dell' ombra portata dal gocciolatojo sul fregio.
2. Tirisi la $\mu r$ paralella alla $bc$, e la $rst$ orizzontale; indi le $\delta hs$, $qt$ paralelle alla $O$, e la $tv$ verticale, e sarà $hstv$ l' estremo dell' ombra portata sul fregio dal modiglione avente $aq$ per ortografia.
3. Conducasi la lineetta $uy$ paralella alla $I$, ed $yg$ verticale, ed in questa avrassi l' ombra portata dal triglifo nella metopa.

L' estremo inferiore dell' ombra richiesta sarà adunque $cdf1ii2$ - - $m4lyghstvx$ - -.

Osservazione. Se l' angolo acuto fatto colla $ML$ dalla $\omega n$ fosse maggiore di quello che fa la $I$ colla medesima $ML$, nel canaletto di ciascun triglifo cadrebbe un' ombra; gli estremi verticali di queste ombre, le quali per altro hanno luogo rarissime volte per la poca profondità dei canaletti medesimi, si determineranno come la $kx$ della figura trentesimanona.

Così, se il punto $t$ cadesse nell' ortografia dell' altro modiglione, per avere i punti che si dovranno sostituire in tal caso ai due $t$, $v$, basterà fare per gli $n$, $c$ ciò che si è fatto per gli $r$, $d$; e per descrivere le porzioni delle linee, le quali cadranno in questa ortografia, e che verranno sostituite in tutto od in parte alle $vx$, $ts$, si dovrà fare pel punto $\mu$ quello che si è fatto superiormente pel $b$, onde delineare la linea $1ii$ - - $23m$ - -.

## PROPOSIZIONE VIII.

*Trovare l' ortografia dell' ombra che accade sulla base attica (tav. XIII, fig. 121) insieme ad una porzione non rastremata del fusto della colonna, nell' ipotesi che la luce abbia la direzione ordinaria.*

1. Si facciano le linee $ab$, $bc$, $de$, $fx$, $xy$, $yh$ come si sono fatte le $ab$, $bc$, $de$, $fg$, $gh$, $hp$ della figura centosedicesima.
2. Disegninsi $nr$, $vu$ ortografie dell' estremo dell' ombra propria della listella e del toro inferiore, e l' $st$ ortografia dell' ombra portata sul toro medesimo dallo spigolo di quest' ultima listella, che ha l' ortografia nella retta di cui è parte $mn$; queste tre linee si faranno colle regole usate qui sopra per disegnare le analoghe $de$, $yh$, $fx$.
3. Si descrivano $l\xi m$, $tv$ ortografie delle ombre portate sulla scozia e sul toro inferiore dalla linea che ha l' ortografia nella $hy$; questo si otterrà agevolmente colla proposizione trentesimanona della parte precedente.

L' ortografia richiesta sarà adunque - - *abcdefxyhlmnrstvu*123.

Osservazione 1. Le ortografie delle ombre portate dalle rette *de*, *rn* non sono visibili, perchè cadono sugli anelli orizzontali *Pf*, *rs*, i quali hanno ordinariamente una larghezza eguale all' altezza *nr*; anzi su questi anelli medesimi cadranno porzioni anche delle ombre portate dagli archi aventi le ortografie nelle *Md*, *mn*, come si è mostrato che succede per la base toscana.

Osservazione 2. La linea che rappresenta il contorno superiore dell' ortografia dell' ombra che cade sulla scozia dovrebb' essere rigorosamente composta dalle due parti $l\mu$, $\xi m$ esprimenti le ortografie dell' ombra portata sulla stessa scozia dal toro superiore, e dalla terza $\mu\xi$ ortografia dell' estremo dell' ombra portata sulla medesima scozia dalla listella superiore ad essa, e propriamente dall' arco circolare avente - - $\alpha\beta$ - - per ortografia; ma siccome la maggior larghezza verticale dello spazietto che bisognerebbe lasciare in luce sulla listella è poco più di un ventesimo dell' altezza della medesima listella, pertanto si potrà supporre tutto il contorno suddetto espresso dalla sola linea $l\mu\xi m$ ortografia dell' ombra portata sulla scozia dalla linea avente *hy* per ortografia, stante che nei disegni ordinarj la ventesima parte dell' altezza della listella anzidetta è trascurabile.

## PROPOSIZIONE IX.

*Trovare l' ortografia delle ombre che accadono sull' archivolto* (*fig.* 122) *avente per profilo* ABEIC, *nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la solita direzione ordinaria.*

1. Si tiri il prolungamento *Xn* - - della *FG*, e la $\partial Cn$ che faccia l' angolo *LCn* semiretto, e descrivasi l' arco *Hj* col raggio *IC* e col centro *n*; sarà questo l' estremo dell' ombra che cadrà sul piano *Ij*.
2. Prolunghisi $\mu A$ in *z*, e si costruisca l' angolo *BAz* eguale al dato $\Delta$, e prendasi 96 eguale alla distanza che ha il segamento *B* dalla *A*8, e sarà 6 l' ortografia del punto dell' ovolo nel quale cadrà l' ombra portata dal punto avente la sua in 9.
3. Facendo centro in *C* e con un raggio maggiore di *C*6 e minore di *C*9, si descrivano gli archetti *i*, *b*, *b*; tirisi *iva* paralella alla *A*8, e si determini il punto *r* della *Cn*, la cui distanza dalla *ML* sia eguale alla *av*; indi col centro *r* e col raggio eguale alle *C*8 si descrivano gli altri archetti *c*, *c*; e nei segamenti di questi coi due antecedenti avransi due punti della linea 56*h*7 ortografia dell' ombra portata sull' ovolo dall' arco circolare che ha 897 per ortografia, osservazione terza, proposizione trentesimaquarta, parte terza.

Osservazione. Le intersecazioni degli archetti *b*, *c*, che cadranno sotto la linea *ML*, si ommetteranno, perchè sono affatto inutili per la descrizione della linea qui dimandata. Così essendo la porzione 65 eguale perfettamente alla *h*6, basterà descrivere col metodo qui indicato la 6*h*7, e poscia copiare opportunamente la sua parte *h*6 nella 65, che si otterrà l' intera linea 56*h*7 in quistione.

4. Descriverassi tanto l'ortografia $N\delta tk$, quanto l'icnografia $RTU$ dell'estremo dell' ombra propria dell'ovolo: anche qui per descrivere la parte $\delta N$ si potrà ricopiare la porzione $\delta e$ della $\delta ek$.
5. Fatta $Tt$ perpendicolare alla $ML$, le $tx$, $TX$ paralelle alle $O$, $I$, dal punto $X$ dove $TX$ incontra il prolungamento della $FG$ tirata $Xx$ perpendicolare anch' essa alla $ML$, avrassi nel segamento $x$ un punto dell'estremo $oxq$ dell' ombra che porta l' ovolo sul piano $Ifq$, osservazione prima, proposizione seconda, parte terza; anche per questa linea si potrà avere la porzione $of$ copiando opportunamente la parte $fg$ della $fgq$.
6. Così, incominciando dal termine $k$, fatta $pP$ perpendicolare alla $ML$, le $PY$, $py$ paralelle rispettivamente alle $I$, $O$, e dal segamento $Y$ della $PY$ colla $YU$ prolungamento della $DE$ condotta $Yy$ perpendicolare essa pure alla $ML$, si otterrà in $y$ un punto qualunque dell' ombra $2k$ portata da una porzione della linea $kp$ - - - $UP$ - - sul piano della listella avente per profilo $DE$.
7. Pei segamenti $q$, $2$ si tireranno le $q\beta$, $\alpha 23$ paralelle alla $O$, e si descriverà colla regola esposta nella proposizione trentesimanona della terza parte l' ortografia $q3$ dell' ombra portata sul guscio generato dall' arco $EF$ dalla linea che ha per ortografia $\alpha\beta$.
8. Finalmente si descriva l'ortografia $34$ dell' ombra che porta sul guscio anzidetto l' arco circolare avente per ortografia $24$, osservazione terza, proposizione trentesimaquarta, parte antecedente.

Osservazione. Se col raggio $6\theta$ eguale alla $9C$, facendo centro in $\theta$, si descriverà l' arco cadente fra le rette $MC$, $k7$, esso si approssimerà assaissimo alla linea $56h7$; così l' archetto $q3$ sarà prossimamente la stessa retta che unisce i suoi termini.

## PROPOSIZIONE X.

*Data l'ortografia e l'icnografia di una sfera, trovare l' estremo dell' ombra che essa porta sul piano icnografico.*

I circoli $BC$, $RI$ (fig. 123), che hanno i centri in $A$, $G$, siano l' ortografia e l' icnografia della sfera.

Si tiri la $AD$ verticale, la $FGS$ paralella alla $I$, le $BE$, $CL$ tangenti l' ortografia e che facciano gli angoli $BEM$, $CLE$ ambi eguali al $\Sigma$, e poscia si facciano $GH$, $GS$ eguali rispettivamente alle $DE$, $DL$; e dal punto $Q$ di mezzo della $HS$ tirinsi le $NQ$, $QP$ ambe eguali alla $FG$ e perpendicolari alla stessa $HS$, e saranno $HS$, $NP$ i due assi della periferia ellittica $SPHN$ rappresentante l' estremo dimandato, siccome è evidente.

Osservazione i. Pertanto, descritta la semiellisse $RmI$ icnografia del contorno dell' ombra propria della sfera, sarà $rNSPsItm\nu Rr$ l' estremo

dell' ombra che bisognerà disegnare: è desso composto dalla semiellisse *RmI*, dai due archi circolari *Rr*, *sI*, e dall' altro arco ellittico *rSs*.

Se il punto *E* cadesse a destra del *D*, si prenderebbe *GH* a destra del *G*, vale a dire in generale bisogna fare la retta linea *HGS* eguale alla *EDL* anco nelle parti rispettive.

Osservazione 2. In un modo affatto simile si determinerà anche l' estremo dell' ombra che la sfera porterà sul piano ortografico.

Osservazione 3. Nell' ipotesi ordinaria per rispetto alla direzione della luce il quadrato della *HS* asse maggiore eguaglia il triplo di quello dell' altro.

## PROPOSIZIONE XI.

*Trovare l'ortografia dell'ombra che accade sul frontespizio (tav. XII, fig. 124), di cui le cornici hanno per profilo la fig. 125.*

1. Si tirino le *AB*, *CD* (fig. 124) perpendicolari alle cornici, la *EI* (fig. 126) orizzontale, e le *EG*, *EF*, *EH*, *EW* paralelle rispettivamente alle *AB*, *CD*, *O*, *I*.
2. Conducansi le *HIW*, *KHG*, *HF* perpendicolari alle *EI*, *EG*, *EF*, seghinsi le *GK*, *FL* eguali alla *WI*, ed uniscansi le *EK*, *EL*.
3. Facciasi l' angolo *kac* = *EKG* (fig. 125), e tirinsi le *dm*, *fh* paralelle alla stessa *ac*, e la *dm* sia tangente la linea *ce*; seghinsi *AM*, *AN*, *AP*, *AB* eguali rispettivamente alle distanze che hanno i punti *c*, *d*, *m*, *h* dalla retta *ka*, e nelle *Mq*, *Nϖ*, *Jt*, *BT* paralelle alla *Aδ* avransi le ortografie degli estremi delle ombre che accadranno sul braccio *Ao* del frontespizio.

Se la *dm* segasse la *ξ*2, la *Jz* segherebbe la *ka*.

4. Così, fatto *kab* = *ELF*, le rette *en*, *ξr*, *fg* paralelle alla *ab*, di cui la prima sia anche tangente l' arco *d*2, e segate le parti *Cp*, *Cq*, *Cr*, *Cs*, *CD* eguali correlativamente alle distanze che hanno i punti *b*, *e*, *n*, *r*, *g* dalla *ka*; e poscia tirate le *xp*, *yq*, *vr*, *zs*, *TD* paralelle tutte alla *δC*, e le *δx*, *ϖy*, *av*, *kz*, *oT* alla *O*, si avranno nelle *xp*, *yq*, *vr*, *zs*, *TD* gli estremi delle ombre che cagiona sopra sè stesso l' altro braccio del frontespizio.
5. Si descrivano i due archetti *qx*, *ϖy* esprimenti le ortografie delle ombre portate sulla gola da piccole porzioni delle rette aventi le ortografie nelle *δA*, *ϖN*, proposizione undecima, parte terza, non che l' ombra portata sul piano della listella 1*vr* da una parte di quella che ha per ortografia la retta *ϖN*, cioè si tiri la *v*1 paralella anch' essa alla *δA* e distante da questa quanto il punto *μ* segamento delle *dm*, *nξ* lo è dalla *ka*.

---

## PROPOSIZIONE XII.

*Ammesso che i raggi di luce abbiano l' ordinaria direzione, trovare l' ortografia del contorno dell' ombra che accade nella nicchia (tav. XIII, fig. 127), di cui la parte avente l' ortografia* MBDL *è la metà della superficie di un cilindro retto avente l' asse verticale, e quella che ha per ortografia* BCD, *cioè la volta, la quarta parte di una superficie sferica.*

Si unisca il punto $a$ di mezzo della $ML$ col $b$ centro del cerchio $BCD$, si faccia $bc = bD$, descrivasi col centro $a$ il quadrante circolare $Ld$, si tiri ad esso la tangente $df = \frac{1}{2} aL$, ed uniscasi $aef$, e dal segamento $e$ s' innalzi la verticale $eg$; in fine seghisi la quarta parte $Dh$ della semiperiferia $BCD$, e facciasi l' angolo $Bgl$ semiretto; l' ortografia dimandata sarà composta della retta $ac$, la quale rappresenta l' ortografia dell' ombra portata dallo spigolo $MB$ nel fondo della nicchia, dalla curva $csg$ esprimente l' ortografia dell' ombra portata dall' arco $Bnl$ sulla medesima superficie cilindrica $MBDL$, e dall' arco ellittico $gh$, il quale esprime quella dell' ombra portata sulla superficie della volta dall' arco $lCh$, proposizione decimaquinta, parte antecedente.

Per delineare $cg$, dai termini della verticale $Nn$ si tirino le $Nr$, $ns$ paralelle alle $I$, $O$, e dal segamento $r$ la $rs$ paralella alla $MB$; ed il punto $s$ comune alle $ns$, $rs$ apparterrà alla linea dimandata, osservazione seconda, proposizione sesta, parte terza.

Osservazione 1. Se i raggi di luce fossero diretti comunque, si descriverebbero le linee analoghe alle $ac$, $cg$, $gh$, usando le regole esposte nelle proposizioni terza, sesta, decimasesta della terza parte, e si troverebbero i punti $c$, $g$, $h$ con altre regole dichiarate nel seguito di queste medesime proposizioni.

Osservazione 2. Se la volta superiore sarà una superficie di rotazione qualunque avente l' asse di rotazione verticale, le parti $ca$, $cg$ si troveranno, come ho detto poc' anzi, e la $gh$ colla proposizione trentesimanona della parte antecedente; se poi la medesima volta sarà la metà della superficie di una ellissoide o di una paraboloide ellittica, ovvero di quella di una iperboloide a due foglie, e che $BCD$ sia il piano della prima sezione della stessa superficie, si descriverà la parte $gh$ colla proposizione ventesimaquarta della parte anzidetta, e le altre $ca$, $cg$ come sopra.

---

## PROPOSIZIONE XIII.

*Data l'ortografia dello spaccato, ad un tempo profilo*, MBCL (*tav. XII, fig.* 128) *della nicchia di cui si parla nell' antecedente proposizione, trovare l'ortografia dell'ombra che portano i suoi lembi su di essa, nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ammessa nella stessa proposizione antecedente.*

Dal punto $a$ di mezzo del quadrante $BaC$ si tiri l'orizzontale $ab$ e si seghi la terza parte $Cc$ della corda del medesimo quadrante; l' ortografia dimandata sarà la linea $bca$, composta dell' arco ellittico $ac$, che rappresenta l' ortografia dell' ombra portata dall' arco $aB$, proposizione decimaquinta, parte terza, e dell' altro arco $bc$ pure ellittico, il quale esprime l' ortografia dell' ombra che porta l' arco avente $Bb$ per ortografia sulla medesima volta della nicchia, osservazione terza, proposizione decimottava.

Osservazione. Se i raggi di luce avranno tutt' altra direzione che l' ordinaria, troveransi i punti $b$, $c$, $a$, e si descriveranno gli archi ellittici colle regole esposte nelle proposizioni decimasesta e decimottava dell' anzidetta parte, e di cui le citate dianzi sono casi particolari; così se la volta sarà una delle superficie contemplate nell' osservazione seconda della proposizione antecedente, troveransi le linee analoghe colle proposizioni ventesimaquarta, ventesimaquinta, ventesimanona e trentesimaprima anch'esse della terza parte.

## PROPOSIZIONE XIV.

*Descrivere l'ortografia del contorno dell'ombra cadente nel fondo della nicchia che ha il rettangolo* FMLG (*tav. XIII, fig.* 129) *per icnografia, e la figura* MAnEL *per ortografia.*

Si conducano le $FH$, $HI$, $AI$ paralelle alle $I$, $MA$, $O$, e la $IN$ orizzontale, e si descriva la porzione $ID$ della linea $IDN$ eguale perfettamente alla $ADE$, e sarà $HID$ l' ortografia dimandata.

Osservazione 1. Se l' arco $ADE$ sarà circolare, si tireranno $FH$, $HI$, $AI$ come qui sopra, e pei punti $C$, $c$ projezioni del centro dell' arco $ADE$ condurransi le $CY$, $cy$ paralelle alle $I$, $O$, e poscia la verticale $Yy$: fatto ciò, col centro $y$ e col raggio $FC$ si descriverà l' arco $DI$, e sarà $HID$ l' ortografia richiesta.

Osservazione 2. Se i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, sarà $Ax = xI = MF$; e però, fatte $Ax$ e l' orizzontale $xI$ ambedue eguali alla profondità della nicchia, avrassi immediatamente il punto $I$ e la verticale $IH$; così estesa l' $xI$ di $Iy$ eguale alla $Ac$, si avrà $y$ centro per descrivere l' arco $ID$, e tutto ciò senza bisogno dell' icnografia della nicchia.

Osservazione 3. Nel caso dell'ordinaria direzione dei raggi di luce, e che la profondità della nicchia sia la metà della sua larghezza, e l' arco $ADE$ una semiperiferia circolare, basterà fare $Em$ e l' orizzontale $Im$ eguali alla metà della $ML$, unire $I$ al punto di mezzo della $ML$ stessa, e descrivere col centro $m$ e col raggio $Im$ l' arco $ID$, che avrassi l' ortografia dell' estremo dell' ombra, cioè la linea $HID$.

## PROPOSIZIONE XV.

*Data l'ortografia e l'icnografia dello spaccato ordinario di un arco, trovare l'ortografia dell'estremo dell'ombra che accade sopra di esso, ed il contorno dell'ombra portata dal medesimo sul piano ortografico.*

Sia $Mub$ ( tav. XIV , fig. 130 ) l'ortografia, ed $MDB$ l'icnografia dell'arco, ed $f\mu m$ la sezione fatta al medesimo, cioè il profilo, supposto che siasi disposta in questa posizione paralella al piano ortografico col fare un quarto di rotazione attorno alla verticale $fM - F$.

### DELL' OMBRA CHE ACCADE SULL' ARCO.

1. Tirinsi le $pq$, 12 paralelle alle $O$, $I$, e la $2q$ alla $Ff$, indi l'orizzontale $lq$, e sarà $3ql$ l'ortografia del contorno dell'ombra che accade sul piè-dritto.
2. Conducasi la $\delta u$ tangente la curva $f\mu m$, e che faccia colla $ML$ l'angolo eguale al complemento di $\Gamma$, e poi dal punto di contatto tirisi l'orizzontale $\delta o$, ed $o$ sarà il termine superiore dell'ortografia dell'ombra che cade sulla superficie della volta dell'arco. Coll'osservazione prima della settima proposizione della parte terza si avrà un punto qualunque dell'arco $oe$; finalmente anche l'ultimo $e$ di esso arco.

Osservazione. Se i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, il punto $q$ cadrà nella retta $D3$ e ad una distanza dalla retta $ph$ eguale all'aggetto dello spigolo $ph - 14$.

### DELL' OMBRA PORTATA SUL PIANO ORTOGRAFICO.

Le rette $de$, $li$ siano paralelle alla $O$, i punti 8, 9 dell'arco $fm$ siano nelle orizzontali tirate per gli $e$, $d$, ed i due $D$, $E$ abbiano dalla $2F$ distanze eguali rispettivamente a quelle che hanno gli anzidetti 8, 9 dalla verticale $bM$; così sia $i6$ paralella alla $Bb$, ed $F5a$ alla $I$.
La linea che porta il contorno di quest'ombra è composta delle $B - ba$, $BC - bc$, $CD - cd$, $EF - ef$, $45 - g$, $4 - gh$, $46 - hi$, $F - lM$; per trovarla,

1. Si tirino le $bB'$, $cC'$, $eE'$, $gG$, $hH$, $lI$ paralelle alla $O$, e le corrispondenti $BL$, $CS$, $E\Delta$, - - paralelle alla $I$; indi conducansi le verticali $LB'A$, $SC'$, $\Delta E'$, - -, ed avransi i punti $B'$, $C'$, $E'$, $G$, $K$, $H$ ed $I$ della linea in quistione.
2. Si congiungeranno le rette $aI$, $IH$, $HK$, $KG$, $C'B'$, e si descriverà tanto la curva $GE'$, che rappresenta l'ombra portata dall'arco $EF - ef$, quanto la $E'C'$ esprimente quella portata dall'arco $CD - cd$, ambedue mediante l'osservazione terza della proposizione seconda della parte terza: la linea $aIHKGE'C'B'A$, composta di queste curve e delle rette $aI$, $IH$, $HK$, $KG$, $C'B'$, sarà il contorno qui dimandato.

Osservazione. Se la curva $fm$ fosse di second' ordine, tali sarebbero anche le tre $oe$, $GE'$, $E'C'$: essendo $fm$ un arco circolare, questi archi saranno ellittici. In quest' ultimo caso, frequentissimo in pratica, si potrà avere immediatamente il punto $e$ senza descrivere veruna parte della curva $oe$, e nel modo che segue.

Pei punti $C, n$ projezioni del centro dell'arco $CD---nc$ si tirino le $CV$, $cv$ paralelle alle $I$, $O$, si faccia l'orizzontale $v\lambda = BV$, e si descriva l'archetto $\mu$ col centro $\lambda$ ed il raggio eguale a quello dell'arco stesso, e che seghi l'arco $fm$; indi conducasi dal segamento $\mu$ l'orizzontale, e questa incontrerà la verticale $bf$ nel punto $e$ termine richiesto.

La periferia circolare avente il centro in $V-v$ ed il raggio eguale a quello dell'arco $fm$ si trova nella superficie cilindrica che ha le rette generatrici paralelle ai raggi di luce, e per base l'arco $CD---nc$, e questa periferia circolare sega evidentemente la $BF-bf$ nel punto che ha il segamento $e$ anzi determinato per ortografia; adunque ecc.

Nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, descritti col raggio anzidetto e coi centri $v$, $n$ due archi, e dal loro incontro più in alto tirata l'orizzontale a segare $bf$, avrassi immediatamente in questo segamento il punto dimandato $e$.

## PROPOSIZIONE XVI.

*Il rettangolo* EDAM (*tav. XIII, fig.* 131) *esprime l'ortografia dello spaccato ordinario di una volta a botte, il quadrante circolare* BCA *quella di una mezza volta emisferica, la quale ha il centro nel termine dell' asse di quella a botte; qual sarà l'ortografia dell'ombra che accadrà nella volta composta da queste due, nell' ipotesi della direzione ordinaria dei raggi di luce?*

1. Facciansi gli angoli $ADF$, $ABC$ semiretti, e si tirino le orizzontali $HI$, $FG$, e la corda $KJx$ del cerchio $BHFK$ paralella alla $BC$; gli archi ellittici $ca$, $ce$, i quali esprimono le ortografie delle ombre portate dagli archi circolari aventi per ortografie $BHa$, $BI$, descriveransi colle regole dichiarate nella proposizione decimasesta e nell'osservazione terza della proposizione decimottava, ambedue della parte terza.
2. Si tiri l'orizzontale $RrT$ tra i punti $G$, $e$, e poscia col centro $D$ ed il raggio eguale alla $RT$ si descriva l'archetto $S$ che sega la stessa $RT$, e questo segamento sarà un punto dell'arco ellittico $GSe$ esprimente l'ortografia dell'ombra portata dalla retta $ED$ sulla medesima porzione di superficie sferica avente $ABC$ per ortografia; oppure si conduca la $rs$ perpendicolare alla $HF$, ed estendasi sino alla semiperiferia $HsF$ descritta sulla $HF$, e seghisi $RS = rs$, e si otterrà lo stesso punto $S$.

Di fatto l'ombra portata dalla retta $DE$ sulla superficie sferica è evidentemente la sezione fatta alla superficie medesima dal piano paralello ai raggi di luce e che passa per la stessa retta $DE$: l'ortografia di essa sezione sarà adunque l'ellisse che ha per uno degli assi la verticale $GI$, e l'altro, cioè l'orizzontale, eguale alla corda $FH$. Ma è

$$GR : \tfrac{1}{2}\,GI = Fr : \tfrac{1}{2}\,FH,$$

$$\text{ed } IR : \tfrac{1}{2}\,GI = Hr : \tfrac{1}{2}\,FH,$$

o sia $GR \cdot IR : (\frac{1}{2} GI)^2 = Fr \cdot Hr : (\frac{1}{2} FH)^2$,

ovvero $GR \cdot IR : (\frac{1}{2} GI)^2 = (rs)^2 ; (\frac{1}{2} HF)^2$;

ed appunto sta per l' ellisse

$$GR \cdot IR : (\frac{1}{2} GI)^2 = y^2 : (\frac{1}{2} HF)^2;$$

$y$ esprime l' ordinata orizzontale dell' ellisse e corrispondente al punto $R$; adunque sarà $y$ eguale alla retta $rs$. Quindi il punto $S$, sopra determinato, si troverà nella periferia della medesima ellisse, come ho dichiarato.

L' estremo dell' ombra che accadrà sulla volta in quistione avrà adunque per ortografia la linea *EDBaceGAM*.

Osservazione. Onde avere il punto *e* comune agli archi *GSe*, *ec* senza delineare essi medesimi, sulla corda *xIK* si descriverà la periferia circolare *xyzK*, farassi *Iy* perpendicolare alla stessa *IK*, si tirerà la *yz*, la quale comprenda colla *Kx* l' angolo eguale al dato $\Delta$; indi si condurrà dal punto *z* la perpendicolare alla medesima *xK*, ed avrassi nel piede di questa il punto *e* richiesto, proposizione vigesimaseconda, parte terza.

## PROPOSIZIONE XVII.

*Trovare l' ortografia e l' icnografia dell' ombra che accade sul corpo di fabbrica (tav. XI, fig.* 111*) composto del tetto* Lm – LP *e dell' altana* ah4 – AHD.

1. Si faccia l' angolo 214 eguale al complemento del $\Gamma$, si tiri 1*xz* parallella alla *O* e l' orizzontale 23, e sarà *xz*3 l' estremo inferiore dell' ortografia dell' ombra visibile portata sull' altana dalla gronda del suo tetto.

   Se il punto *x* cadrà nel 2 ovvero sotto di questo, l' estremo in quistione sarà la semplice retta orizzontale 23.

2. Si conduca *AM* paralella alla *I*, *Mm* perpendicolare alla *ML* asse, ed uniscasi *am*; tirinsi le 3*n*, 4*is* paralelle alla *O*, la *ns* alla *LM*, e poi le *iI*, *nN* perpendicolari alla stessa *LM*, e la *NS* paralella ed eguale alla *ns*.
3. Meninsi le *DE*, *Ee* paralelle rispettivamente alle *AM*, *Nn*, e le *EF*, *ef* paralelle ed eguali alla 14; finalmente si tirino le *FG*, *fg*, *HG*, *hg* ordinatamente paralelle alle *ES*, *es*, *AM*, *am*, e saranno *ansefgh* - -, *ANSEFGH* - - l' ortografia e l' icnografia dimandate, come risulta dalla proposizione prima della parte antecedente.

Osservazione 1. Se la luce avrà la direzione ordinaria, il punto *x* cadrà insieme al *z* nel punto 2, e le rette 12, 3*n*, 4*is*, *AM*, *DE*, *HG* faranno degli angoli semiretti colla *ML*; e però saranno facilmente determinate.

Osservazione 2. Qualora si abbia solo per iscopo di acquerellare, si potranno ommettere le linee *hg*, *gf*, *fr*, *Ht*, *Au*, essendo esse coperte dall' ortografia o dall' icnografia dell' altana.

Queste rette, che nel detto caso si possono ommettere, variano evidentemente, variando la direzione della luce, le dimensioni e le posizioni relative del tetto e dell' altana: in

generale, ammesso sempre che abbiasi di mira il solo acquerellamento, si potranno ommettere come inutili le porzioni del contorno *hgfre* - - che cadranno nell' ortografia dell' altana o sopra l' orizzontale - - *im*, come pure quelle dell' altro contorno *HGFE* - - che risulteranno nel rettangolo esprimente l' icnografia dell' altana medesima, ovvero sopra l' asse *LM*.

## PROPOSIZIONE XVIII.

*Vi sono delle superficie cilindriche le quali hanno le rette generatrici orizzontali, e sono conosciute per via della loro retta generatrice che si trova nel piano icnografico e della sezione fatta ad esse da un piano perpendicolare alle medesime generatrici. L' ortografia e l' icnografia del contorno delle ombre proprie di queste superficie si potranno anche determinare col metodo seguente.*

Sia *LC* ( tav. XIV, fig. 132 ) la retta generatrice, lungo la quale è segata la superficie cilindrica dal piano icnografico, ed *elc* ( fig. 133 ) rappresenti la sezione fatta alla medesima superficie dal piano verticale che passa per la *CQ* perpendicolare alla stessa *LC*.

Si faccia *DE* paralella alla *I*, *DF* perpendicolare all' *ML* asse, e *DA* alla *LC*, *FG* paralella alla *O*, *EHG* perpendicolare anch' essa all' *ML*, ed *EA* alla *DA*; si seghi *AB* eguale alla *GH*, ed uniscasi *BD*, indi si conduca la *dl* tangente la curva *cle*, e che faccia l' angolo *ldq* eguale all' *ADB*; tirisi *lq* perpendicolare alla *xd*; finalmente si faccia $CQ = cq$, $HV = ql$, e conducansi le *QR*, *VT* paralelle rispettivamente alle *CL*, *ML*, e saranno queste l' icnografia e l' ortografia del contorno dell' ombra propria in quistione.

Dal punto *E* — *G* sia tirata la perpendicolare al piano verticale che passa per *DA*, ed unito il suo piede ai due punti *D*, *A*; la prima di queste rette rappresenta nel detto piano verticale la projezione ortogonale della *ED* — *GF* paralella ai raggi di luce, e la seconda, la quale è nella stessa verticale passante per *A*, sarà eguale alla *GH* o sia alla *AB*; quindi l' angolo che fa la prima di queste ultime due rette colla *DA* eguaglierà il *BDA*, vale a dire quella retta la quale si trova nel piano verticale e perpendicolare alla *LC*, e che rappresenta la projezione ortogonale di una paralella ai raggi di luce, fa coll' orizzonte un angolo eguale al *BDA* costituito sopra.

L' estremo dell' ombra propria della superficie è la retta generatrice comune alla superficie cilindrica ed al suo piano tangente paralello ai raggi di luce: questa retta sega l' intersecazione fatta alla medesima superficie dal piano verticale condotto per la *CQ* in un punto, da cui, tirata la retta tangente a questa intersezione, si ottiene la stessissima comune sezione del piano verticale e del piano tangente anzidetto. Ma nella retta intersecazione comune di questi due piani cade la projezione ortogonale fatta, sul piano verticale, delle rette paralelle ai raggi di luce che si trovano nel piano tangente; adunque la retta tangente alla comune sezione della superficie cilindrica e del piano verticale che passa per *CQ*, e che tocca questa medesima intersecazione nel punto comune all' estremo dell' ombra, deve fare coll' orizzontale *CQ* un angolo eguale al *BDA*; e per essere la retta *qd* orizzontale, e la linea *cle* la medesima intersecazione, la retta *ld* esprimerà la tangente in quistione; quindi, essendo le *VH*, *CQ* eguali rispettivamente alle *lq*, *eq*, e le *VT*, *QR* paralelle alle *ML*, *LC*, saranno esse *VT*, *QR*, la prima l' ortografia, e la seconda l' icnografia dimandate, cioè del contorno dell' ombra propria della superficie cilindrica.

Osservazione. Se la linea *lce* sarà un arco di cerchio, facendo l'angolo *lxc* al suo centro eguale all' *ABD*, si avrà immediatamente il punto *l* di contatto; e se essa sarà una linea di second' ordine, potrassi determinare il punto medesimo di contatto anche colle regole esposte nei *lemmi nono*, *decimo ed undecimo*.

## PROPOSIZIONE XIX.

*Data l' ortografia* vecgh-- (*fig.* 134) *e l' icnografia* BCDEFGHV *di una volta a padiglione od a spicchi, non che la sezione* xy (*fig.* 135) *fatta ad essa perpendicolarmente ad una delle rette* CD, DE--, *trovare l' ortografia e l' icnografia del contorno dell' ombra propria di essa superficie.*

Si tirino le *AI*, *IO*, *IP*, *IS*, *IU* (fig. 136) paralelle rispettivamente alle *I*, *CD*, *DE*, *EF*, *FG*, e le *AO*, *AP*, *AS*, *AU* perpendicolari alle *IO*, *IP*, *IS*, *IU*, e le *ANJ*, *IK* alla *ML* asse, e la *KJ* paralella alla *O*; indi si seghino le *OQ*, *PR*, *ST*, *UX* eguali alla *JN*; uniscansi le *AQ*, *AR*, *AT*, *AX*; si conducano le 1*n*, 2*p*, 3*q*, 4*r* tangenti la curva *x*143*y*, e che facciano gli angoli 1*nx*, 2*px*, 3*qx*, 4*rx* eguali ordinatamente agli *OAQ*, *RAP*, *SAT*, *XAU*, e le 1*i*, 2*k*, 3*l*, 4*m* perpendicolari alla *ML*. Fatto ciò, si tirino le $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$, $\theta\eta$ paralelle rispettivamente alle *CD*, *DE*, *EF*, *FG*, e le cui distanze da queste siano eguali alle *xi*, *xk*, *xl*, *xm*, e le 11, 22, 33, 44 paralelle alla *ML* e distanti da essa correlativamente di 1*i*, 2*k*, 3*l*, 4*m*; e saranno, per la precedente proposizione,

$$C\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta G,\ c11223344g$$

l' icnografia e l' ortografia dimandate.

Nel disegno ortografico si segna la sola ortografia *c*1122*e*, perchè la rimanente risulta coperta dall' ortografia della stessa superficie.

Se la retta *lq* sarà parte della *ML*, come nella figura presente, le 11, 22, 33, -- saranno porzioni delle paralelle alla *ML* medesima condotte pei punti 1, 2, 3, --.

Così, se le superficie esteriori degli spicchi saranno cilindriche ordinarie rette, supposto $\Delta$ il centro dell' arco *xy*, i punti di contatto 1, 2, 3, -- si determineranno assai facilmente e con somma esattezza, facendo gli angoli $1\Delta x$, $2\Delta x$, $3\Delta x$, $4\Delta x$ al centro dell' arco *xy* ed eguali ordinatamente agli *AQO*, *ARP*, *ATS*, *AXU*.

Osservazione. Pel punto *I* non ho condotto le paralelle alle *BC*, *GH*, perchè le facce della volta, le quali si appoggiano su questi lati, sono interamente illuminate.

---

## PROPOSIZIONE XX.

*Una superficie cilindrica, che ha le rette generatrici orizzontali, è segata dal piano icnografico lungo la retta* AB (*fig.* 137), *ed ha per sezione piana perpendicolare alla stessa* AB *la linea* DPE; *qual sarà l' ortografia dell' ombra portata su questa superficie dalla linea* GHS – ghs?

Trovato l' angolo $\theta$ che fa la projezione ortogonale della paralella ai raggi di luce sul piano verticale e perpendicolare alla $AB$, proposizione penultima, si tiri $HI$ perpendicolare alla stessa $AB$, $Hh$ alla $ML$ asse, e la $hm$ paralella alla $O$; si faccia $EN = IH$, la $NT$ perpendicolare alla $EN$ ed eguale alla $hp$, e la $TP$ che faccia colla $EN$ l' angolo eguale al $\theta$ anzi trovato; in ultimo conducasi $Pm$ paralella alla $ML$, ed il segamento $m$ sarà un punto dell' ortografia dimandata.

Si conduca la $PQ$ perpendicolare alla $LM$. Trasportato il piano $DEF$ verticalmente sulla $HI$, in modo che il punto $E$ cada in $I$, la linea $EQF$ secondo la $IH$; la nuova posizione del punto $T$ coinciderà coll' $H - h$, quella del $P$ sarà nella generatrice della superficie in cui cadrà l' ombra portata dalla $H - h$; e però la distanza fra quest' ombra ed il piano icnografico eguaglierà la $PQ$; quindi la sua ortografia sarà nella retta $Pm$.

Ma l' ortografia dell' ombra portata dal punto $H - h$ debb' essere anche nella $hm$; sarà adunque essa in $m$, come voleva dimostrare.

## PROPOSIZIONE XXI.

*Data l' icnografia* ABCDE - - KV (*tav. XVI, fig.* 138) *e l' ortografia* abcde - - kv *dello spaccato ordinario di una volta a spicchi, e le superficie cilindriche a cui appartengono gli spicchi come la superficie cilindrica considerata nella proposizione antecedente, trovare l' ortografia dell' ombra portata nell' interno di essa volta dal suo lembo* AVK - - - avk.

Si faccia $GH$ perpendicolare alla $ML$ asse, $GI$ paralella alla $I$, $HF$ alla $O$, $FI$ anch' essa perpendicolare alla $ML$, $IL$ paralella alla $AB$, ed uniscasi $HL$; indi si tirino le $mt$, $nf$ paralelle alla $HL$, la prima tangente, e l' altra segante la $vma$, e le $nx$, $fx$ paralelle alle $O$, $ML$; ed il segamento $x$ sarà un punto del contorno dell' ortografia dell' ombra cadente sulla superficie $ABV - abv$, ed $m$ un termine del medesimo: nel modo che si è trovato il punto $x$, si troverà qualsivoglia altro punto del lato $mp$ della linea esprimente l' ortografia dimandata.

Gli altri lati $pq$, $qS$, ecc. del medesimo contorno si descriveranno colla proposizione antecedente: essi sono le ortografie delle ombre portate dalla linea $AVK - avk$ sulle superficie cilindriche che hanno le rette generatrici orizzontali e che sono segate dal piano icnografico lungo le rette $BC$, $CD$, ecc.

L' ortografia dimandata sarà adunque $Sqpmvk$.

Osservazione 1. Estesa *CD* sino in *P* ad incontrare il prolungamento della *VA*, e tirata *PQ* perpendicolare alla *ML*, *QU* paralella alla traccia ortografica del piano che passa per *DCP* ed è paralello ai raggi di luce, e dal segamento *U* condotta *US* paralella alla *O*, si otterrà in *S* il principio inferiore dell' arco *Sq*, cioè il punto dove la linea *mpqS* segherà l' orizzontale *LM*, e ciò senza descrivere la linea stessa.

Osservazione 2. Se gli spicchi della volta saranno altrettanti triangoli rettilinei, la linea *mpqS* ortografia dell' estremo dell' ombra si ridurrà ad una sola retta, la quale si determinerà facilissimamente come segue.

L' ortografia della volta sia *abcde - - kv* (fig. 139), e l' icnografia la medesima *ABCDE - - KV* della figura antecedente.

Si tirino le *vg*, *VN* paralelle rispettivamente alle *O*, *I*, la *gN* perpendicolare alla *ML*; uniscasi *NK*, e dal punto *R*, comune a questa retta ed alla *CD*, si tiri *Rr* perpendicolare alla stessa *ML*, e nella retta *vr* avrassi l' ortografia dell' estremo dimandato.

Imperciocchè, per essere *VN — vg* paralella ai raggi di luce, sarà *NK* la traccia icnografica di quel piano paralello ai raggi di luce il quale passa per la linea che porta l' ombra, cioè per la *KV — kv*; e per conseguenza *R — r* sarà un punto della linea esprimente l' ombra portata sulla superficie della volta dalla stessa *KV — kv*; ma quest' ombra deve passare anche pel punto *V — v*; sarà dunque la retta situata nel piano *BCV — bcv* e che ha i termini nei punti *R — r*, *V — v*: quindi l' ortografia di essa, cioè la cercata, sarà la retta *vr*, come ecc.

## PROPOSIZIONE XXII.

*Ammesso che la luce abbia la direzione ordinaria, trovare l' ortografia degli estremi delle ombre che accadono nello spaccato ordinario di una cupola coperta dalla superficie di un emisfero aperta in cima circolarmente.*

Siano *MmaIz4L*, *MSL* (tav. XV, fig. 140) l' ortografia e l' icnografia della nicchia, ed *YI* il suo asse.

1. Dal punto *r* di mezzo della *bQ* si prenda $r\mu = rI$, e dal segamento dei due archetti *Z* descritti coi centri $\mu$, *I* e col medesimo raggio *br* si tiri *Zo* perpendicolare alla *bQ*; e pel punto *V* di mezzo del quadrante *BR* si tiri la verticale *Vv*, e saranno *o*, *v* i termini dell' arco ellittico *vo* esprimente l' ortografia dell' ombra portata da una porzione dell' arco *BVR – HI* sulla superficie cilindrica *BRX – HQ*. Quest' arco ellittico si potrà descrivere colla regola esposta nel corollario terzo della proposizione terza della parte antecedente.
2. Si seghino le terze parti $l\lambda$, $c\alpha$ delle corde $Q\lambda$, $b\alpha$ del circolo $JQ\lambda$ ambe paralelle alla *O*, e trovinsi i punti *T*, *d* ortografie di quelli, ove la semiperiferia $JQ\lambda$ ed il suo diametro orizzontale sono segati dall' ortografia

dell' ombra portata sulla volta dalla periferia stessa $JQ\lambda$; indi descrivansi della medesima ortografia le due porzioni $Tt$, $cd$ colla proposizione trentesimaquinta, parte anzi citata.

3. Pel punto $o$ si tiri $f10e6$ paralella alla $O$, descrivasi sulla sua parte 16 la semiperiferia 176, tirisi la $fN$ perpendicolare alla $f6$, e la $fFE$ verticale; seghisi $fN = EF$, indi conducasi la $N7$, che faccia colla $f6$ l' angolo eguale al dato $\Delta$, e dal segamento 7 tirisi la $7e$ perpendicolare alla stessa $f6$, ed avrassi in $e$ l' altro termine dell' arco ellittico $le$ esprimente l' ortografia dell' ombra portata dall' arco circolare avente $Qo$ per ortografia, il qual arco ellittico si descriverà colla proposizione decimanona, ed anche coll' osservazione seconda della proposizione trentesimaquarta, ambedue della terza parte.

4. Così, descritta la semiperiferia $2\beta k$ sulla corda $2k$ parte della retta $Hk$ paralella anch' essa alla $O$, facciasi l' angolo $2H\beta$ esso pure eguale al $\Delta$; tirisi $\beta i$ perpendicolare alla $Hk$, ed avrassi in $i$ il punto comune alle parti $ie$, $ic$ dell' ortografia del contorno dell' ombra cadente nell' interno della volta.

   La prima di queste parti, cioè la $ie$, la quale esprime l' ortografia dell' ombra portata dall' arco circolare $BF - Hf$, si descriverà colla medesima regola esposta nell' osservazione seconda anzi citata, e la seconda $ic$ ortografia dell' ombra che cagiona la verticale $B - bH$ si farà mediante il corollario quinto, proposizione trentesimottava della parte terza.

   Osservazione. Conducasi la verticale $Kh$, che passi pel punto $C$ di mezzo della corda $BR$, e sia eguale alla $CS$, e tirisi la verticale $Ss$, ed avransi nelle rette $Kh$, $Ks$ due semiassi della periferia ellittica, di cui è parte l' arco $ic$. Conoscendosi di quest' arco i due semiassi, esso si potrà anche descrivere coi metodi ordinarj.

5. Si costruiscano le porzioni $MO$, $GD$ della periferia ellittica che rappresenta l' ombra portata dalla periferia $JQ\lambda$ sul piano orizzontale $as$, e ciò col corollario secondo, *lemma primo*; e dai segamenti $O$, $G$ tirinsi le verticali $OP$, $Gg$, e dai $P$, $g$ le $PJ$, $g8$ parallele alla $O$.

6. Si descrivano le ortografie $ty$, $xn$ delle ombre portate dagli spigoli $5j - uz$, $9\beta - 34$ sulle superficie cilindriche aventi le ortografie negli spazj $uy3$, $xnp$, osservazione seconda suddetta, od anche osservazione seconda, proposizione sesta, ambe della terza parte.

   Queste ortografie ai termini $y$ ed $n$ piegheranno in alto, come è espresso nella figura, di una parte piccolissima.

7. Colla stessa ultima osservazione anzi accennata trovinsi le linee $gu$, $t3$ e la $xp$ intercette fra le rette $JPp$, $3x$, $ut$ paralelle alla $O$, ortografie delle ombre portate dalle tre parti successive dell' arco $J8$ sulle superficie $4G\Delta - az$, $5j - tu$, $MDL - mL$.

8. Finalmente colla medesima osservazione seconda della proposizione sesta citata si descrivano le *pq*, *qwY* ortografie delle ombre portate sulla *MDL* – *mL* superficie cilindrica della cupola dall' arco circolare *AO* – *aP* e dalla linea mistilinea *amM* – *MA*.

L' ortografia dimandata sarà dunque *Tleicdguzyt34nxpqwYMmaJbHroQ*.

Osservazione 1. La superficie interna della cupola essendo quella di rotazione avente per generatrice *HbJamM*, e per asse di rotazione la verticale *YI* — *Y*, si potrà descrivere l' intera linea *Tleicdgut3xpqrwY* anche colla sola regola esposta nella proposizione ventesimanona, parte precedente, osservando che la linea portante gli estremi dell' ombra è la composta da quelle che hanno per ortografie *QT*, *QO*, *fH*, *Hb*, *bJ*, *aP*, *am*, *mM*.

Osservazione 2. Se la cupola fosse coperta da una superficie di rotazione avente l' asse verticale e aperta in cima circolarmente, si descriverebbe l' estremo dell' ombra o determinando le successive sue parti mediante le proposizioni relative alle superficie di rotazione analoghe alle sovraccitate per la sferica, ovvero colla stessissima regola citata nell' osservazione antecedente.

## PROPOSIZIONE XXIII.

*Trovare l' ortografia dell' ombra che accade sul muro che ha* ABCDEF - - ( *tav. XIII*, *fig.* 141 ) *per icnografia*, *ed* LMabcdef - - *per ortografia.*

Si tirino le *A*1, *B*2, *C*43 paralelle alla *I*, le *a*5, *b*6, *c*87 alla *O*, e le 1*n*5, 26, 37, 48 alla *Aa*, ed uniscansi le 56, 697, 98, 8*d*, e saranno *d*8, 896, 65, 5*n* le ortografie delle ombre portate sul muro dalle rette *CD* – *cd*, *BC* – *bc*, *AB* – *ab*, e dalla parte superiore della *A* – *Ma*; quindi l' ortografia dimandata sarà *Mabcd*8965*n*.

## PROPOSIZIONE XXIV.

*Data l' ortografia e l' icnografia di un pozzo militare piramidale, trovare l' icnografia dell' ombra che accade nella sua icnografia, e l' ortografia di quella che accade nello spaccato ordinario di esso, ammesso che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.*

Sia *FKG* (fig. 143) l' icnografia, *lmj* ( fig. 142 ) l' ortografia del pozzo, e *v* l' incontro delle *hj*, *ki*.

### DELL' ICNOGRAFIA.

Si tiri la retta *lc* paralella alla *O*, e dai punti *c*, *b*, dove sega la *ki* ed il prolungamento della *mk*, tirinsi le *cC*, *bB* paralelle all' asse del pozzo; indi congiungansi le *AEB*, *STB* e le *EC*, *CT*, e sarà *AECTSF* l' icnografia dimandata.

Conducasi *hp* paralella anch' essa alla *O*, la *pP* all' asse, ed uniscasi *PQ*: fatto ciò, tirinsi le *LD*, *HN* paralelle alla *I*, e le *Dd*, *Nn* all' asse medesimo; congiungansi le *dn*, *nrv*, e avrassi nella *ldnrjh* l' ortografia dimandata.

Osservazione 1. Se si avesse la sola porzione *LAGM* dell' icnografia, cioè quella della metà del pozzo, condotte le rette *NRV*, *RJ*, l' icnografia dell' ombra cadente in essa sarebbe evidentemente *AEDNRIL*.

Osservazione 2. Se la direzione della luce fosse qualunque (fig. 143 e 144), condotte *Fc*, *lc* paralelle alle *I*, *O*, le *cC*, *bB*, *eE* all' asse del pozzo; ed unite *STB*, *TPC*, *AE*, tirata *PO* paralella alla *AG*, ed unita anche *EO*, sarà *AEOPTSF* l' icnografia dell' ombra che accadrà in questo caso nel pozzo intero.

## PROPOSIZIONE XXV.

*Il rettilineo* mcqjs (*tav. XVII, fig.* 145) *composto dei due trapezj* mc*as*, *a*qjs, *rotando attorno alla verticale* C – cq, *genera un pozzo militare conico, il quale ha per ortografia* mlyzjs, *e per icnografia* MALW (*fig.* 146); *qual sarà l' icnografia dell' ombra che accadrà sopra di esso, e l' ortografia di quella cadente nel suo spaccato ordinario?*

Siano *V*, *p* i punti dove i prolungamenti della *yz* incontrano le *cC*, *cl*, e *v* sia quello d' incontro della stessa *cC* col prolungamento della *ly*.

### DELL' ICNOGRAFIA ED ORTOGRAFIA DEL CONTORNO DELL' OMBRA CHE CADE SULLA SUPERFICIE CONICA GENERATA DALLA RETTA *MS*–*ms* NELLA SUDDETTA ROTAZIONE.

1. Si tirino le *vd*, Γ*CD* paralelle alle *O*, *I*, e la *dD* alla *cC*, e dal segamento *D* tirinsi le *DA*, *D*1 tangenti la periferia *AL*1; i punti *A*, 1 di contatto saranno anche i due segamenti della stessa periferia *AL*1 colla icnografia qui richiesta, corollario della proposizione decimaterza, parte terza. Così, tirata *Aa* pel contatto *Ae* paralella alla *Cc*, si avrà il segamento *a* dell' ortografia dimandata coll' orizzontale *ml*, corollario medesimo.
2. Si faccia *c*$\lambda$ paralella alla *dv*, *Ee* alla *cC*, e descrivansi gli archetti *B*, 3 col raggio eguale alla *CM* e col centro *E*, ed avransi in *B*, 3 gli altri due termini dei contorni *AB*, 13: condotta poscia *Bb* paralella anch' essa alla *cC*, il suo segamento *b* coll' orizzontale *sy* sarà anche quello di questa coll' arco *ab*, ovvero il termine inferiore di questo medesimo arco, osservazione terza, proposizione trentesimaquarta, parte terza.

Osservazione. Tirata $mr$ paralella alla $dv$, e la $rR$ alla $cC$, posto $cm = a$, $s\alpha = b$, $c\alpha = r$, l'angolo $MCD = n$, e la cotangente del $vdc = \xi$; e nominata $P$ la porzione della $Rr$ intercetta fra il punto $R$ ed il segamento di esso $Rr$ colla paralella alla $CD$ tirata pel punto $M$, si avrà

$CR = r\alpha = mc - c\alpha \cdot cotang.\ rmc = a - r\xi$, e $P = c\alpha \cdot tang.\ vdc\ tang.\ MCD = r\xi\ tang.\ n$, e l'ordinata del cerchio $SBY$, che corrisponde al punto $R$ medesimo, eguale a

$$\sqrt{\{b^2 - (a - r\xi)^2\}}.$$

Adunque l'ombra portata dal punto $M - m$ sul piano orizzontale che passa per $sy$ sarà fuori o dentro della periferia $SBY3$, ovvero nella periferia medesima, secondo che risulterà $r\xi\ tang.\ n$ maggiore o minore, od eguale a $\sqrt{\{b^2 - (a - r\xi)^2\}}$.

Pel caso delle dimensioni ordinarie del pozzo e che i raggi di luce siano diretti, come suppongono generalmente i disegnatori, si ha $b = \frac{3}{4}a$, $r = \frac{3}{8}a$, $\xi = 1$, $tang.\ n = 1$, e però

$$P = \frac{3}{8}a, \text{ e } \sqrt{\{b^2 - (a - r\xi)^2\}} = \frac{a}{8}\sqrt{11}; \text{ cioè}$$

$$r\xi\ tang.\ n \text{ minore di } \sqrt{\{b^2 - (a - r\xi)^2\}};$$

e conseguentemente l'ombra portata dal punto $M - m$ cadrà dentro il cerchio $SBY$, appunto come ho tacitamente supposto.

3. Condotte le $fgh$, $fF$ paralelle rispettivamente alle $lm$, $cC$, e descritti i due archetti che si segano in $K$, 4, l'uno col centro $F$ e col raggio eguale alla $cm$, e l'altro facendo centro in $C$ e col raggio eguale alla $gh$; questi due segamenti saranno due punti delle curve $AB$, 13, osservazione terza anzi citata. In fine il segamento $k$ dell'orizzontale $gh$ colla $Kk$ tirata per $K$ paralellamente alla stessa $Cc$ sarà un punto dell'ortografia $ab$.

Osservazione. Le tre linee $AB$, 13, $ab$, delle quali le due prime si eguagliano perfettamente, saranno archi ellittici per la proposizione decimaterza sopraccitata, e però essi si potranno anche delineare colle cose colà dichiarate.

## DELL' ICNOGRAFIA DELL' ESTREMO DELL' OMBRA CADENTE SULLA SUPERFICIE DEL TRONCO DI CONO $syzj - SBY3$.

Ammesso che il pozzo abbia le ordinarie dimensioni, e che la luce sia diretta, come si suppone comunemente, il rimanente arco costituente l'estremo dell'ombra, quello cioè i cui termini hanno le icnografie nei punti $B$, 3, e che io suppongo che abbia $BO3$ per icnografia, sarà portato interamente da una porzione della periferia avente $AWL$ per icnografia; più l'icnografia del medesimo arco cadrà tutta fuori del cerchio $QJZ\beta$.

Imperciocchè, condotta la $Vi$ paralella alla $O$, la $iI$ alla $Cc$, le $IX$, $I5$ tangenti il circolo $B5Y$, e le $XN$, $BQ$ perpendicolari amendue alla $IC$, si ha

$$CI : CX = CX : CN, \text{ ed } EB^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CE}^2 + 2CE \cdot CQ,$$

$$\text{o sia } CN = \frac{\overline{CX}^2}{CI}, \text{ e } QC = (\overline{EB}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2) : 2CE.$$

Ma, ritenute le denominazioni fatte poc' anzi, e posto di più $aV = d$, $cos. n = \beta$, si ha

$$CX = BC = b\,,\; BE = a\,,\; CI = \frac{ia}{cos.\,n} = \frac{d\,\xi}{\beta}\,,\; CE = \frac{ea}{cos.\,n} = \frac{r}{\beta}\,\xi\,;$$

adunque sarà

$$CN = b^2 : \frac{d\xi}{\beta} = \frac{b^2\beta}{d\xi}\,,\text{ e } QC = \left(a^2 - b^2 - \frac{r^2\xi^2}{\beta^2}\right) : 2\,\frac{r\xi}{\beta}\,,$$

$$\text{ovvero } CN = \frac{2b^2r\beta^2}{2rd\xi\beta}\,,\text{ e } QC = \frac{(a^2 - b^2)\,d\beta^2 - r^2d\xi^2}{2rd\xi\beta}.$$

Quindi sarà $QC$ minore di $CN$, se $(a^2 - b^2)\,d\beta^2 - r^2d\xi^2$ sarà minore di $2b^2r\beta^2$, o sia $\{(a^2 - b^2)\,d - 2b^2r\}\,\beta^2$ di $r^2d\xi^2$, oppure $\frac{(a^2 - b^2)\,d - 2b^2r}{dr^2}$ minore di $\frac{\xi^2}{\beta^2}$: così se saranno queste ultime due quantità eguali, ovvero la prima maggiore dell'altra, tale pure sarà $QC$ rispetto alla $CN$.

Nell' ipotesi ordinaria, sì per le dimensioni del pozzo che per la direzione della luce, si ha $b = \frac{3}{4}\,a$, $r = \frac{3}{8}\,a$, $d = \frac{5}{3}\,a$, $\xi = 1$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, valori che riducono

$$\frac{(a^2 - b^2)\,d - 2b^2\,r}{dr^2} = \frac{59}{45}\,,\text{ e } \frac{\xi^2}{\beta^2} = 2\,;$$

vale a dire in questo caso $\frac{(a^2 - b^2)\,d - 2b^2r}{dr^2}$ minore di $\frac{\xi^2}{\beta^2}$, e però $QC$ minore della $CN$; quindi l' arco $X5$, il quale porterebbe l' ombra sulla superficie conica $SBY3 - syq$, si trova nello spazio già ombreggiato dalla superficie conica $A1LC - mvl$, e conseguentemente l' estremo in quistione sarà portato interamente dall' arco che ha per icnografia $AW1$.

Dal punto della periferia $AWL - ml$, il quale ha $W$ per icnografia, s' immaginino tirate due rette, l' una verticale, e l' altra paralella ai raggi di luce, e congiunti i punti ove queste rette incontrano il piano orizzontale della $jz$, e si avrà un triangolo rettangolo, il cui cateto orizzontale sarà eguale alla retta $cq$ moltiplicata per la cotangente dell' angolo $\Sigma$, cioè al prodotto $cq \cdot \frac{\xi}{cos.\,n}$; e però la distanza fra il punto $C$ e l'icnografia di quello del piano orizzontale anzidetto, in cui cadrebbe l' ombra portata dal punto dell' arco avente $W$ per icnografia, eguaglierà

$$cq \cdot \frac{\xi}{\beta} - a;$$

quindi, siccome nell' ipotesi comune si ha $cq = \frac{13}{8}\,a$, $\xi = 1$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, per cui risulta la detta distanza eguale ad

$$\frac{a}{16}\,(26\sqrt{2} - 16)\,,$$

ed il raggio del fondo del pozzo, cioè $CZ = \frac{3}{16}\,a$, ed è evidentemente $26\sqrt{2} - 16$ maggiore di 3; così l' ombra portata dal punto della periferia $AWL - ml$, il quale ha l'icnografia in $W$, cadrà sulla superficie conica avente l' icnografia nell' anello compreso fra le due periferie circolari $B3Y$, $IQ\beta Z$.

Ora il punto dell' icnografia $BO3$, più vicino al $C$, è quello che trovasi nella retta $IC\Gamma$; adunque il contorno dell' ombra in quistione non solo è portato dalla periferia circolare avente per icnografia $AW1$, ma cade anche interamente sulla superficie conica, la cui icnografia è l' anello compreso fra le due anzidette periferie circolari.

Per descrivere l' icnografia di questo contorno, cioè la qui richiesta, si tiri $\mu\xi\lambda$ orizzontale, $\lambda\Gamma$ paralella alla $Cc$; indi si descrivano due archi, l' uno col centro $C$ ed il raggio eguale alla $\mu\xi$, e l' altro col centro $\Gamma$ e col raggio $CM$; vale a dire si faccia per l' orizzontale $\mu\lambda$ ciò che si è fatto qui sopra per la $fh$, e nei segamenti di essi archi avransi due punti della icnografia dimandata $BO3$.

Osservazione. Se l' arco $SX$ risultasse maggiore della $SB$, il contorno dell' icnografia dell' ombra cadente sulla superficie conica, che ha per icnografia l' anello compreso fra le periferie $B3Y$, $IQ\beta Z$, sarebbe composto delle icnografie delle ombre portate su questa superficie dalle parti della periferia $BSY - sy$, che hanno per icnografia $BX$, $35$, e di quella portata dalla porzione dell' arco $AW1 - ml$ avente l' icnografia intercetta fra le paralelle alla $CI$ tirate pei punti $B$, $3$. L' ultima di queste parti dell' icnografia richiesta si descriverebbe come sopra; e le prime, facendo per la periferia $BSY - sy$ ciò che si è fatto per $AW1 - ml$ onde delineare le linee $AB$, $13$.

Così, se risulterà $cq \cdot \frac{\xi}{\beta} - a$ minore di $CZ$, la parte più prossima al punto $O$ della stessa linea $BO3$ cadrà nel piano del fondo del pozzo, e sarà questa una porzione della periferia circolare eguale perfettamente alla $A1L$ avente il centro in quel punto della $W\Gamma$ in cui cadrebbe l' ombra portata dal punto $C - c$ sul piano dello stesso fondo.

In fine, se l' angolo che fanno i raggi di luce col piano orizzontale sarà maggiore dell' $msi$, la superficie conica avente per icnografia l' anello $AWLBY$ sarà interamente in luce, ed il contorno dell' ombra che accadrà nel pozzo perverrà dall' ombra portata dalla periferia $B3Y - sy$; e sì l' icnografia che l' ortografia del medesimo contorno si descriveranno come si è veduto nella proposizione decimaterza suddetta.

Quest' ultimo caso succede sempre quando il pozzo consiste in un semplice tronco di cono rovesciato, come sono quei pozzi che si fanno alcune volte nei fossi e sulle banchine, ecc.

### DESCRIZIONE DELLA LINEA $b\delta\iota\theta$, CIOÈ DELL' ORTOGRAFIA DELL' ESTREMO DELL' OMBRA CHE ACCADE NELLO SPACCATO DELLA MEDESIMA SUPERFICIE CONICA AVENTE PER ORTOGRAFIA IL TRAPEZIO $syzj$.

Si conduca $BP$ paralella alla $I$, l' estremo dell' ombra di cui si parla sarà l' ombra portata sulla detta superficie conica dalla linea composta dell' arco circolare avente $PM$ per icnografia, della retta $MS - ms$, e da una parte della $SJ - sj$.

1. La parte $b\delta$, la quale esprime l' ortografia dell' ombra portata dall' arco avente $PM$ per icnografia, si descriverà colla prima regola usata superiormente per descrivere l' arco $ab$.

Il termine inferiore della linea $b\delta$, il quale si trova nella $mr\delta$ paralella alla $dv$, si potrà anche determinare nel modo seguente, senza descrivere la stessa linea $b\delta$.

Conducansi (fig. 147) le 689, 78, 79, 76 paralelle rispettivamente alle $dl$, $mV$, $d\varrho$, $CV$, e le $9H$, $6H$ paralelle alle 67, $I$, e congiungasi $H8$; questa retta, ammessa la 69 l'asse comune ai piani ortografico ed icnografico, sarà la traccia icnografica del piano che passa per la $68-78$ e per la $79-6H$ paralella ai raggi di luce. Ciò fatto (fig. 145 e 146), si tiri $MU$ paralella alla $8H$, $M\Delta$ alla $CI$, congiungasi $U\Delta C = cp$; e si tiri pel segamento $\Delta$ la $\Delta\vartheta$ paralella alla $Cc$, ed avrassi nel punto $\vartheta$ comune alle $\Delta\vartheta$, $m\vartheta$ il punto richiesto, proposizione decimaterza medesima.

2. Congiungasi la $ISG$, poi la $CG$; tirisi $ST$ paralella alla $CD$, e la $Tt$ alla $Cc$, e la $st$ alla $O$; si unisca la $t\theta V$, e sarà $t\theta$ l'ortografia dell' ombra che porta $SJ-sj$-- sulla superficie conica avente il trapezio $syzj$ per ortografia.
3. Descrivasi l' arco ellittico $\vartheta t$ ortografia dell' ombra portata sulla detta superficie conica dalla retta $MS-ms$ coll' osservazione seconda della proposizione decimaquarta, parte terza, ovvero descrivasi la medesima, determinando un suo punto qualunque, come si è determinato poc' anzi il $\vartheta$.

Non espongo per l' ortografia $ab\vartheta t\theta$ i diversi casi che possono succedere, sì per le dimensioni del pozzo che per la direzione dei raggi di luce, come ho fatto per l' icnografia, giacchè non farei che ripetere ciò che ho detto per questa.

Concludo pertanto che l' icnografia e l' ortografia dimandate saranno

$ABO31WA$, $mab\vartheta t\theta jsm$.

## PROPOSIZIONE XXVI.

*Trovare l' ombra che i parapetti della scala rappresentata dalla fig. 148, tav. XVIII portano sui piani ortografico ed icnografico, e sopra i gradini di essa.*

Si tiri la $cB$ paralella alla $O$, e dal punto $C$ la paralella alla $I$; se questa cadrà nella $CL$, che sega il prolungamento della $aB$, condotta $BE$ perpendicolare all' asse $ML$, saranno $cBa$, $aBEC$ le ombre portate dal parapetto $Ca-ac$ sui piani ortografico ed icnografico: se passerà pel punto $B$, le ombre richieste saranno $cBa$, $CBa$; e se essa retta segherà la medesima $aB$, per esempio in $l$, tirata la perpendicolare alla $ML$, le ombre portate dallo stesso parapetto $Ca-ac$ sui piani ortografico ed icnografico saranno $cela$, $Cla$.

Così si conduca $hn$ paralella alla $O$, ed $HA$ alla $I$; e poscia le $p$, $q$,-- paralelle alla $Hh$, e che prolungate passino pei segamenti $P$, $Q$,--, e si continui la linea spezzata $rpq$-- sino ad incontrare la retta $hn$, e si avrà l' ortografia dell' ombra portata sui gradini dal parapetto $Hr-rh$ nella figura $agn$---$qpr$. Similmente tirinsi le $G$, $I$, $N$,-- paralelle anch' esse alla $Hh$, e che i loro prolungamenti passino pei segamenti $g$, $i$, $n$,--; e continuisi

quest' operazione sino a tanto che la linea spezzata *GIN*-- seghi la retta *HA*, e sarà *HPQ*--*NIG*-- l'icnografia dell' ombra portata sulla scala dal medesimo parapetto *Hr*–*rh*.

Nel caso dell' ordinaria direzione della luce le successive rette $p$, $q$, -- hanno una distanza eguale alla larghezza di ciascun gradino, e le $I$, $N$, -- eguale all' altezza dei medesimi; e però, siccome in tal caso $ag$ eguaglia $ah$, così si potranno descrivere le ortografie e le icnografie in quistione, senza delineare l' altra di esse projezioni.

Osservazione 1. Se i raggi di luce illumineranno la parte posteriore del piano ortografico, il disegno ortografico sarà interamente in ombra, e gli estremi delle ombre portate dai parapetti sul piano icnografico e sopra i gradini saranno *OJDK*--, *XSTV*--*x*--*NI*Δ--, la cui determinazione è per sè evidente.

Osservazione 2. Per avere le ombre che in quest' ultimo caso porta ciascun gradino sul suo immediatamente inferiore, si tiri $\alpha\lambda$ paralella alla $O$, la $\lambda t$ alla $hH$, ed estendasi sino ad incontrare la $r\Delta$ paralella alla $I$, e conducasi la $ts$ perpendicolare alla stessa $hH$; indi si facciano le $y1$, $z2$, -- eguali alla $rs$, e tirinsi le $I1$, $N2$, -- paralelle alla $ML$, e saranno queste gli estremi inferiori delle ombre qui richieste.

Osservazione 3. Quando i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, tanto le distanze $y1$, $z2$, --, quanto quelle delle successive linee $G$, $I$, $N$, -- eguaglieranno l' altezza di ciascun gradino; e però in tal caso si potranno descrivere facilissimamente le linee *GIN*-- *TSX*, $I1$, $N2$, --, non che la *OJDK*--, essendo le rette *SD*, *DK* paralelle rispettivamente alle *HC*, *Cc* e distanti da queste quant' è l' altezza di ciascun parapetto sul piano icnografico; e tutto ciò si potrà fare senza disegnare l'ortografia della scala.

## PROPOSIZIONE XXVII.

*Ammessa l' ordinaria direzione dei raggi di luce, trovare l' icnografia dell' ombra che accade sulla scala espressa dalla figura* 149.

Si seghi *HB* eguale all' altezza che ha sul ripiano *G*Δ il muro avente per icnografia *F*Δ, e si tirino le rette *BA*, *C*, *D*, -- paralelle alla *F*Δ, e che abbiano l' una dall' altra una distanza eguale all' altezza di ciascun gradino, e si continui la linea *ABCD*-- sino ad incontrare la retta *FE* paralella alla *I*, e nella linea *FE*--*DCBA*Δ si otterrà l' icnografia dell' ombra cagionata dal muro anzidetto.

Similmente facciasi *nu* eguale all' altezza che ha il muro, avente per icnografia *GnT*, sul piano del gradino che ha *mn*, e poscia si costituisca la linea *numrsl*--, le cui parti *mr*, *sl*, -- eguaglino l' altezza di ciascun gradino, e le *mu*, *rs*, -- siano paralelle alla stessa *Gn*, e si estenda la medesima linea sino a segare la retta *GH* paralella alla *I*, e si avrà nella *GHlsrmun* l' icnografia dell' ombra portata sui gradini della seconda rampa *GM* dal muro *Gn* suddetto.

Osservazione 1. Se la linea $ABCD$-- incontrasse la retta $GX$ prima della $EF$, l' estremo dell' ortografia dell' ombra sarebbe costituito dalle linee $FE$, $ABCD$-- continuate sino alla $GX$, e dalla parte della $GX$ intercetta fra queste medesime due linee.

Osservazione 2. Se la seconda rampa della scala sarà $TQ$ in vece della $GM$, l' icnografia dell' ombra portata dal muro su di essa e sul ripiano che ha $TnG$ per icnografia risulterà $GNPQcztT$: questa si determinerà col fare $GN$ paralella alla $O$, ed $NP$, $PQ$ alle $Gn$, $nT$ e distanti da queste quant' è l' altezza del muro che porta l' ombra sul ripiano; e le $cd$, $yz$,-- paralelle anch' esse alla $nT$ o $PQ$ ed aventi una distanza l'una dall' altra eguale all' altezza di cadauno scalino. Così la linea 12, e le analoghe, la quale rappresenta l' icnografia dell' ombra portata dal terzo gradino sul secondo, si determinerà facendo $z1$ eguale all' altezza di un gradino, e tirando 12 paralella alla $xz$ icnografia dello spigolo del medesimo gradino.

## PROPOSIZIONE XXVIII.

*La figura 150 rappresenta una rampa, un ripiano ed i corrispondenti parapetti di una scala ordinaria; quale sarà l' ombra cagionata da queste parti di essa scala sopra sè stessa, e sui due piani ortografico ed icnografico?*

### DELL' OMBRA PORTATA DAL PARAPETTO $TABC1-yabc$ SOPRA DEI PIANI COORDINATI.

Lo spigolo che porta gli estremi dell' ombra qui dimandata è costituito dalle rette $A-ab$ verticale, $AB-b$ orizzontale, $BC-bc$ paralella per l' ordinario alla rampa della scala, e dalla orizzontale $C1-c$: l' ombra medesima si avrà dunque colle regole esposte nei corollarj primo e secondo della proposizione prima della terza parte.

Si trovino, proposizione citata, i punti 6, 7, 8, 9 del piano icnografico, nei quali cadono le ombre portate dagli $A-b$, $B-b$, $C-c$, $1-c$; si congiungano successivamente, e si avrà nella linea $A6789$ l' estremo dell' ombra portata dal parapetto $TABC1-yabc$ sul piano icnografico. Così determininsi i punti 2, 3, 4, 5 del piano ortogafico, nei quali cadono le ombre portate dai $C-c$, $B-b$, $A-b$, $A-a$; e si uniscano le rette $c2$, 23, 34, 45, e nella $c2345$ avrassi il contorno dell' ombra portata dallo stesso parapetto $TABC1-yabc$ sopra il piano ortografico.

Osservazione. Se i piani ortografico ed icnografico rappresenteranno, l'uno il pavimento, e l' altro un muro, come succede generalmente, ai disegnatori abbisogneranno le sole linee $A6$, 67, $7L$, $c2$, $2L$; cioè delle $A6$, 67, 78, 89 le anteriori alla linea $ML$ asse, e delle altre $c2$, 23, 34, 45 le posteriori alla medesima $ML$; e però potranno risparmiare le operazioni necessarie per la determinazione delle parti $L8$, 89, $L3$, 34, 45: anzi, siccome le due rette 23, 75 debbono segare in uno stesso punto la $ML$, perchè

sono le tracce del piano paralello ai raggi di luce che passa per la $BC - bc$, si potrà tralasciare la determinazione di uno dei due punti 3, 8; giacchè trovato uno di essi, per esempio 8, nel segamento delle $ML$, 78 si avrà il punto $L$, il quale unito al 2 darà immediatamente la retta $2L$, senza verun bisogno del punto 3; e se si troverà 3 reciprocamente, non si avrà bisogno dell' 8.

## DELL' OMRRA CHE PORTA L' ALTRO PARAPETTO, CIOÈ $\Delta KEH\phi - Mkeh$ SUL RIPIANO E SUI GRADINI DELLA SCALA.

Le linee che portano i contorni di quest' ombra sono la verticale $K - ke$, l' orizzontale $KE - e$, la $EH - eh$, e l' orizzontale $H\phi - h$.

1. Si tirino le $KI$, $EJ$, $HD$ paralelle alla $I$, e le $es$, $hg$ alla $O$; si facciano le $\mu 7$, $\beta 3$ eguali alla differenza delle $KT$, $\alpha\xi$, e paralelle alla $ML$, ed uniscansi le $\mu 8$, $\beta 3$: fatto ciò, si tiri $gGD$ paralella alla $Hh$, $DN$ alla $8\mu$, le $Nn$, $np'$, $p'P'$, $P'P$ rispettivamente paralelle alle $Hh$, $\beta 2$, $Hh$, $8\mu$, e la $Pp$ anch' essa paralella alla $Hh$; e poi conducansi le rette indefinite $NPQ$ - -, $npq$ - -, ed a queste le paralelle $P'Q'$, - -, $p'q'$, - -; si uniscano le $Q'Q$, $q'q$, - -, e così si continuino le linee spezzate risultanti $np'pq'q$ - -, $NP'PQ'Q$ - - sino ad incontrare le rette $es$, $EJ$, ed avransi nella $DG$ l' icnografia dell' ombra portata dalla $H\phi - h$, e nelle medesime linee spezzate $np'pq'q$ - - $j$, $DNP'PQ'Q$ - - $J$ l' ortografia e l' icnografia dell' ombra portata dalla retta $HE - he$.
2. Così pei segamenti - -, $s$, $s'$, - - conducansi le - -, $S$, $S'$, - - paralelle alla $Hh$, e si otterrà nella linea spezzata - - $SS'$ - - estesa sino alle rette $EJ$, $KI$ l' icnografia dell' ombra che porta sui gradini la $KE - e$; l' ortografia sarà nella stessa retta $ji$.
3. In ultimo tirinsi le - -, $r$, $r'$, - - paralelle anch' esse alla $Hh$, e che prolungate passino pei segamenti $R$, $R'$, - -, e nella linea spezzata $krr'$ - - $i$ estesa sino a segare la retta $js$ avrassi l' ortografia, e nella stessa $RI$ l' icnografia dell' ombra che porta sui gradini medesimi la verticale $K - ke$.

Osservazione. Se la $HE - he$ sarà paralella al piano della rampa della scala, come accade generalmente, le rette $NPQ$, $npq$ risulteranno paralelle alle $HE$, $he$; e però in tal caso si potrà risparmiare la suddetta determinazione dei punti $p$, $P$, tirando immediatamente le rette $NQ$, $nq$ pei punti $N$, $n$ paralellamente alle stesse $HE$, $he$.

Adunque l' ortografia dell' ombra cagionata dal parapetto $\Delta KEH\phi - Mkeh$ sarà $anp'pq'q$ - - $j$ - - $s's$ - - $ir'rk$, e l' icnografia della medesima $GDNP'PQ'Q$ - - $J$ - - $SS'$ - - $IKEH\phi$.

# PROPOSIZIONE XXIX.

*Trovare le icnografie degli estremi delle ombre che porta sopra sè stessa la pianta di una scala a chiocciola, le cui pareti sono due superficie cilindriche ordinarie.*

Le periferie circolari *ACE* - -, *BDF* - - (fig. 151), aventi ambedue il centro in $\Delta$, siano le icnografie delle pareti della scala, ed il gradino avente per icnografia *tB* sia il più alto, e si discenda la scala medesima pel verso *fgh*.

### DELL' OMBRA CHE PORTANO GLI SPIGOLI DEI GRADINI SUI PIANI DEI GRADINI IMMEDIATAMENTE INFERIORI.

Si tiri $\Delta\Sigma$ paralella alla *I*, costruiscasi l'angolo $\Sigma\Delta a$ eguale al $\Sigma$, cioè a quello che fanno i raggi di luce coll' orizzonte, e dal punto *a*, distante dalla retta $\Delta\Sigma$ quant' è l' altezza di ciascun gradino della scala, tirisi l'$a\theta$ perpendicolare alla stessa $\Delta\Sigma$; indi si conducano le $\theta b$, $\theta c$, $\theta d$, $\theta e$, - - paralelle rispettivamente alle *AB*, *CD*, *EF*, - -, e saranno queste le icnografie qui dimandate.

### DELL' ICNOGRAFIA DEL CONTORNO DELL' OMBRA PORTATA DALLA PARETE AVENTE *ACE* - - PER ICNOGRAFIA.

Dal punto *x* della $\Delta a$, ed avente dalla $\Delta\Sigma$ una distanza eguale all' altezza che ha la sezione della parete sul piano del gradino più alto, conducasi *xy* perpendicolare alla medesima $\Delta\Sigma$, e si facciano *y*1, 12, 23, -- eguali alla $\Delta\theta$ determinata poc' anzi; indi col raggio $A\Delta$ facendo centro successivamente in *y*, 1, 2, 3, - - descrivansi gli archi *f*, *g*, *h*, - -: fatto ciò, si provi a far centro in - -, 8, 9, - -, e col medesimo raggio $A\Delta$ a descrivere gli archetti - -, *o*, *p*, - -; e se questi cadranno nelle icnografie degli scalini - -, ottavo, nono, - - discendendo, essi archetti rappresenteranno insieme ai primi *f*, *g*, *h*, - - le icnografie degli estremi delle ombre portate sulla scala dalla parete avente *ACE* - - per pianta od icnografia.

### DELL' ICNOGRAFIA DELL' OMBRA PORTATA DALLA COLONNA DELLA SCALA O SIA PARETE CHE HA PER ICNOGRAFIA *BDF* - -.

Condotte le due rette *n*, *m* tangenti alla periferia *BDF* e paralelle alla $\Delta\Sigma$, proverassi a far centro nei punti - -, 7, 8, - - e a descrivere col raggio della colonna gli archetti - -, *t*, *r*, *q*, - -; e se questi attraverseranno le icnografie dei gradini - -, settimo, ottavo, - -, come ho supposto nella figura,

sarà *Fnfrqm* - - l'icnografia del contorno dell'ombra cagionata dalla colonna della scala, e qui cercata.

Osservazione. Se le pareti erette verticalmente sulle *ACE* - -, *BDF* - - non saranno superficie cilindriche ordinarie, per determinare l'ombra visibile nella pianta della scala condurransi per un punto Δ, fissato (fig. 152) dovunque, le rette ΔΣ, Δ*E*, Δ*I*, Δ*M*, Δ*N*, - - paralelle, la prima alla *I*, e le altre rispettivamente alle icnografie *AB*, *CD*, *EF*, - - degli spigoli di quei gradini i quali potranno causare ombre sui loro immediatamente inferiori; e dal punto θ, trovato come sopra, si tireranno le θ*i*, θ*a*, θ*m*, θ*n*, - - perpendicolari alle Δ*I*, Δ*M*, Δ*N*, - -; indi si condurranno le *b*, *c*, *d*, *e* - - paralelle alle medesime *AB*, *CD*, *DE*, - -, e le cui distanze da queste siano eguali ordinatamente alle perpendicolari θ*i*, θ*a*, θ*m*, θ*n*, - -; e queste ultime rette saranno le icnografie delle ombre portate sui gradini dagli spigoli degl'immediatamente superiori.

Così, tirata per qualsivoglia punto Δ della pianta (fig. 151) la retta ΔΣ paralella alla *I*, e determinato il punto *y* come sopra, e le successive parti *y*1, 12, 23, - - eguali alla Δθ, si copieranno in un foglio di carta staccato da quello della pianta della scala le linee *ACE* - -, *BDF* - - ed il medesimo punto Δ, precisamente come trovansi nella pianta stessa, e poi si farà muovere questo foglio lungo la retta ΔΣ, per modo che non ruoti, e che il punto Δ segnato in essi passi successivamente negli *y*, 1, 2, 3, - -, e si segneranno di mano in mano nella pianta della scala le parti *t*, *g*, *h*, - - *p*, *o*, - - *q*, *r*, *s*, - - delle copie delle linee *ACE* - -, *BDF* - - disegnate in esso foglio; cioè nella stazione del punto Δ in *y* si segnerà l'arco *t*, nella stazione del medesimo punto Δ in 1 l'arco *g*, ecc. Le rette *b*, *c*, *d*, - -, le curve *t*, *g*, *h*, - - *p*, *o*, - - *q*, *r*, *s* insieme alle altre rette *m*, *n* paralelle alla ΔΣ e tangenti la pianta della colonna costituiranno le icnografie dei contorni delle ombre in quistione.

### Osservazione decimaquarta.

Quantunque le quistioni relative alla delineazione dei contorni delle ombre composte siano assai differenti le une dalle altre, nulladimeno nella soluzione di esse si potrà, anzi sarà generalmente utile, tenere l'ordine seguente: primo, conoscere indistintamente le specie delle superficie semplici che costituiranno la data, e prevedere su quali di esse potranno accadere le varie parti del contorno richiesto; secondo, scoprire di queste ultime superficie quelle loro proprietà che io usai nella seconda e terza parte per iscriverle geometricamente; terzo, descrivere le parti del contorno richiesto, le quali sono estremi delle ombre proprie di quelle

medesime superficie semplici in cui esse parti si trovano; quarto, conoscere almeno due projezioni per ciascuna di quelle linee le cui ombre portate costituiscono le altre parti dell' ombra composta; quinto, finalmente individuare le superficie semplici nelle quali accadranno queste ombre portate, e delineare le medesime.

### Osservazione decimaquinta.

Finalmente, per delineare i contorni delle ombre in un disegno, il quale sia una copia qualunque di uno già ombreggiato, in vece di fare pel nuovo tutto ciò che si sarà fatto per descrivere i contorni delle ombre nel vecchio, basterà ricopiare i contorni delle ombre di questo precisamente come copieransi le altre sue linee onde formare il nuovo medesimo; giacchè le linee costituenti i contorni delle ombre che accadono nelle figure simili, e similmente poste rispetto ai raggi di luce, sono esse medesime altrettante linee simili e similmente situate.

FINE.

# NOTA DEI LEMMI.

## LEMMA I.

*Di una superficie cilindrica, conosciute le projezioni di una sua direttrice e quelle di una paralella alle rette generatrici, trovare una traccia della medesima, per esempio l' icnografia.*

Siano $ab$, $AB$ ( fig. 153 ) l' ortografia e l' icnografia della data direttrice, ed $m$, $n$ quelle della paralella alle rette generatrici, ed $ML$ sia la retta comune ai piani ortografico ed icnografico.

Conducasi $A\alpha a$ perpendicolare all' asse $ML$, e dai punti $a$, $A$ projezioni di un medesimo della direttrice si tirino le rette $ad$, $AD$ rispettivamente paralelle alle $m$, $n$; e dal punto $d$, dove la prima sega l' $ML$, tirisi $dD$ perpendicolare alla stessa $ML$, e sarà $D$ incontro di questa perpendicolare colla $AD$ un punto della traccia icnografica della superficie cilindrica. In un modo similissimo si troveranno tutti gli altri punti della traccia medesima $FDG$.

Essendo $a$, $A$ le due projezioni di un medesimo punto della superficie cilindrica, e le rette $ad$, $AD$ rispettivamente paralelle alle $m$, $n$, saranno queste le projezioni di una retta generatrice della medesima superficie; e per essere la $dD$ perpendicolare alla $ML$, sarà $D$ il punto ove la medesima generatrice incontrerà il piano icnografico; quindi esso punto apparterrà alla traccia dimandata, come ho asserito.

COROLLARIO I. Se la direttrice sarà la stessa linea $bae$, conducendo $ad$ paralella alla $m$, le $a\alpha$, $d\delta$ perpendicolari alla $LM$, e la $\alpha\delta$ paralella alla $I$, nel segamento delle due $\alpha\delta$, $d\delta$, cioè in $\delta$, avrassi un punto della traccia dimandata; anzi in questo caso, tirate le 14, 13, 43 paralelle rispettivamente alle $a\alpha$, $\delta\alpha$, $\alpha\delta$, nel segamento 3 si otterrà evidentemente un altro punto della medesima traccia $b\delta e$. Così, condotta la retta paralella alla $\delta a$ e tangente la curva $bae$, essa risulterà anco tangente la traccia $b\delta e$.

COROLLARIO 2. Se la linea $BAE - bae$ sarà un' ellisse, una parabola od un' iperbola, tale sarà anche la traccia descritta. Nel caso dell' antecedente corollario, ammesso che la linea $bae$ sia una semiperiferia ellittica o circolare avente per asse $be$, ed $\alpha$ per centro, le rette $ba$, $\alpha\delta$ saranno due semidiametri conjugati della semiperiferia ellittica $b\delta e$.

Nel caso medesimo se gli angoli $\delta\alpha L$, $a\delta\alpha$ siano semiretti, i triangoli rettangoli $a\alpha\delta$, $\alpha\delta d$ saranno isosceli, o sia sarà $a\alpha = \alpha d$, ed $\alpha d = d\delta$; e però $d\delta = a\alpha$, come la verticale 23 eguaglierà la 14; quindi, tirate le $\delta\alpha$, 43 paralelle alla $ML$ ed eguali rispettivamente alle $a\alpha$, 41, avransi in un tratto i punti $\delta$, 3, -- della traccia richiesta.

In questo caso, se la linea $bae$ sarà la semiperiferia circolare avente $be$ per diametro, condotta la $bO$ (fig. 154) eguale e perpendicolare alla $be$, la $SPX$ che divida pel mezzo l'angolo $OPM$, e ad essa la perpendicolare $Pu$, e segata di quest'ultima la parte $PT = bs$, e tirata la $uS$ paralella alla $PO$, si avranno nelle $PT$, $PS$ due semiassi della traccia dimandata.

Di fatto si ponga $\partial P = \phi$, $\partial PM = \alpha$, $bP = aP = r$, e si avrà

$$dP = \phi \cos. \alpha, \ \partial d = \phi \operatorname{sen.} \alpha;$$

e però $\overline{aP}^2 + \overline{\alpha a}^2 = \phi^2 \operatorname{sen.}^2 \alpha + (\phi \operatorname{sen.} \alpha + \phi \cos. \alpha)^2 = \phi^2 (1 + 2 \operatorname{sen.} \alpha \cos. \alpha + \operatorname{sen.}^2 \alpha)$,

o sia $\phi^2 (3 + 2 \operatorname{sen.} 2\alpha - \cos. 2\alpha) = 2r^2$,

per essere $2 \operatorname{sen.} \alpha \cos. \alpha = \operatorname{sen.} 2\alpha$, e $\operatorname{sen.}^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. 2\alpha$.

Ora si nomini $m$ l'angolo $bPO$, il quale ha per tangente $-2$, e pongasi $2\alpha = m + x$, e si avrà $\cos. 2\alpha = \cos. (m + x) = (\cos. x + 2 \operatorname{sen.} x) : \sqrt{5}$,

e $\operatorname{sen.} 2\alpha = \operatorname{sen.} (m + x) = (\operatorname{sen.} x - 2 \cos. x) : \sqrt{5}$;

e si sostituiscano nell' equazione dianzi trovata, in vece di $\operatorname{sen.} 2\alpha$ $\cos. 2\alpha$, questi loro valori, ed otterrassi

$$\phi^2 (3 - \sqrt{5} \cos. x) = 2r^2.$$

Quest' ultima equazione insegna che il massimo valore di $\phi$ corrisponde ad $x = 0$, o sia ad $\alpha = \frac{1}{2} m = MPS$, ed il minimo ad $x$ eguale a due retti, oppure ad $\alpha = \frac{1}{2} m + 90^\circ = bPT$; ed anche che il primo di questi valori è eguale ad $\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{(3 - \sqrt{5})}} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1)$, ed il secondo ad $\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{(3 + \sqrt{5})}} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Ma appunto si dimostra, come nella proposizione ottava della terza parte, che le rette $bs$, $SP$ sono eguali rispettivamente ad $\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, $\frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1)$; adunque le rette $PS$, $ST$ saranno due semiassi dell' ellisse $b\partial e$, come ho asserito.

Osservazione. Se la direttrice sarà in un piano perpendicolare alla $ML$ asse, non si potrà descrivere la traccia $b\partial e$ colla regola generale esposta; in tal caso, supposto la direttrice $BDL$ (tav. XV, fig. 155) adattata al piano icnografico, mediante un quarto di rotazione fatta intorno alla sua icnografia $BM$; condotte le $DF$, $pq$, - - paralelle alla $ML$, le $FH$, $qr$, - - alla $I$, e presa $CM = DF$, si tirerà $CN$ paralella alla $O$, $NH$ alla $BM$; indi si condurranno le $pr$ - - paralelle alla $DH$, che unisce $D$ al segamento delle $FH$, $NH$, e si avranno in $r$, $H$, - - altrettanti punti della traccia richiesta.

Ai punti $F$, $q$, - - s' immaginino delle verticali eguali rispettivamente alle rette $DF$, $pq$, - -, e congiungansi i loro termini superiori cogli $H$, $r$, - -, ed avransi dei triangoli rettangoli in $F$, $q$, - -. Questi triangoli rettangoli, i quali sono evidentemente paralelli e simili per avere intorno agli angoli retti i lati paralelli e proporzionali, stante la simiglianza degli altri $DFH$, $pqr$ - -, avranno le loro ipotenuse fra loro paralelle; e perciò siccome la

ipotenusa di quello che ha l' angolo retto in $F$ è paralella alla $m-n$, o sia è dessa una retta generatrice della superficie cilindrica, per essersi fatto $CM=DF$, e le $FH$, $CN$, $NH$ rispettivamente paralelle alle $I$, $O$, $BC$; così tutte le ipotenuse di essi saranno altrettante rette generatrici della medesima superficie cilindrica, e conseguentemente i punti $H$, $r$, -- sopra determinati, i quali trovansi nelle rette generatrici e nel piano icnografico, apparterranno alla traccia richiesta.

Nell' ipotesi che i raggi di luce abbiano l' ordinaria direzione, si ha $CM=MN=FD$, e però $DH$ eguale e perpendicolare alla $FD$. Quindi, condotte le $DH$, $pr$,-- perpendicolari ed eguali rispettivamente alle $FD$, $pq$, --, avransi immediatamente i punti $H$, $r$, -- della traccia in quistione.

## Lemma 2.

*Date le projezioni di una direttrice di una superficie conica e quelle del suo vertice, determinare una traccia di essa, per esempio l' icnografica.*

Siano $BAE$, $bae$ (tav. XIV, fig. 153) le projezioni della direttrice data, $C$, $c$ quelle del vertice della superficie conica, ed $ML$ sia la linea comune ai piani ortografico ed icnografico.

Dalle projezioni $A$, $a$ di uno stesso punto della direttrice siano tirate le rette $AD$, $ad$ per le projezioni del vertice, e dal punto $d$, dove la seconda sega $LM$, sia condotta perpendicolarmente a questa la $dD$, $D$ segamento di quest' ultima retta colla $AD$ sarà evidentemente un punto della traccia dimandata: in una maniera affatto consimile si determineranno anche gli altri punti della traccia medesima $FDG$ icnografica.

## Lemma 3.

*Il luogo geometrico del contatto fra una superficie di second' ordine qualunque ed una superficie cilindrica è una linea piana.*

Siano $x$, $y$, $z$ le coordinate di un punto della superficie di second' ordine, e suppongasi l' asse delle $z$ paralello alle rette generatrici della superficie cilindrica, e

$$z^2+2axz+2byz+cx^2+dy^2+exy+2fz+gx+hy+l=0$$

l' equazione della medesima superficie di second' ordine.

Quest' equazione dà

$$z=-ax-by-f\pm\sqrt{\{(ax+by+f)^2-cx^2-dy^2-exy-gx-hy-l\}},$$

cioè due valori dell' ordinata $z$ per ogni valore delle $x$, $y$.

Ora egli è una proprietà esclusiva ai singoli punti di contatto delle due superficie che ad ogni valore delle $x$, $y$ ne corrispondano due eguali della $z$; ma i valori delle $x$, $y$, che hanno questa proprietà, sono quelli i quali annullano il radicale che entra nell' espressione della $z$; adunque per essi sarà $z=-ax-by-f$,

o sia $z+ax+by+f=0$:

equazione la quale esprime che sono in un medesimo piano e diametrale tutt' i punti di contatto fra la superficie di second' ordine qualunque e la cilindrica tangente ad essa.

Corollario. La superficie cilindrica tangente ad una qualunque superficie di secondo ordine, avendo per una delle sue direttrici la stessa linea di contatto, la quale è di second' ordine perchè piana, sarà essa medesima una superficie di second' ordine.

## Lemma 4.

*Facendo passare un piano lungo una retta avente i termini nella periferia della prima sezione, il quale sia perpendicolare al piano ortografico, esso farà alla superficie di second' ordine una sezione ellittica.*

Sia $CD$ (tav. XV, fig. 156) la retta per cui passa il piano segante.

Si conducano le rette $EF$, $GH$ perpendicolari alla $VT$ asse, e che seghino la retta $CD$ avente i termini nella linea $AVB$; e dai punti $M$, $N$, $L$, $I$ s' immaginino condotte delle perpendicolari al piano $AVBT$ ed estese sino alla superficie di second' ordine, e denomininsi le loro lunghezze rispettivamente $M$, $N$, $L$ ed $I$: analoghe denominazioni si useranno anche altrove.

Evidentemente si hanno le proporzioni

$$M^2:\overline{MF}^2=L^2:EL\cdot LF,\ \ N^2:\overline{NH}^2=I^2:GI\cdot IH,$$

per essere ellittiche le sezioni orizzontali fatte lungo le rette $EF$, $GH$, e la

$$M^2:\overline{MF}^2=N^2:\overline{NH}^2,$$

essendo queste medesime sezioni fra loro simili; adunque sarà

$$L^2:EL\cdot LF=I^2:GI\cdot IH,\ \text{ovvero}\ EL\cdot LF:GI\cdot IH=L^2:I^2.$$

Ma qualunque sia la linea di second' ordine $AVB$, essendo le due corde $EF$, $GH$ fra loro paralelle, si ha

$$EL\cdot LF:GI\cdot IH=CL\cdot LD:CI\cdot ID;$$

quindi avrà luogo la proporzione

$$L^2:I^2=CL\cdot LD:CI\cdot ID,$$

la quale esprime che è anche ellittica la sezione fatta alla superficie di second' ordine dal piano immaginato secondo la $CD$; ciò che ecc.

## Lemma 5.

*Le sezioni fatte ad un' iperboloide dai piani perpendicolari all' ortografico e passanti per le rette* EF, df *paralelle alla* NP *asintota (fig. 157) della prima sezione saranno parabole aventi i parametri reciprocamente proporzionali alle* CF, cf, *porzioni delle stesse* EF, df, *ed intercette fra i vertici* C, c *di esse parabole e la retta* MN, *altra asintota della medesima prima sezione.*

Si tirino le corde $GI$, $HL$ fra loro paralelle e che seghino le rette $EF$, $df$.

Essendo la $CD$ paralella ad un' asintota, e le $GI$, $HL$ paralelle fra loro, sarà

$$CD:CE=GD\cdot DI:HE\cdot EL;\ \text{ma}\ GD\cdot DI:HE\cdot EL=D^2:E^2;$$

adunque sarà

$$D^2:E^2=CD:CE,$$

cioè paraboliche le sezioni fatte perpendicolarmente al piano $AVB$ e paralelle all' asintota $NP$; ciò che volevasi dimostrare in primo luogo.

Così, per essere

$$FN \cdot CD : fN \cdot cd = GD \cdot DI : Gd \cdot dI, \text{ e } GD \cdot DI : Gd \cdot dI = D^2 : d^2,$$

ed anche $D^2 : d^2 = CD \cdot P : cd \cdot p$, $P$ e $p$ indicando i parametri delle due sezioni,

$$\text{sarà } FN \cdot CD : fN \cdot cd = CD \cdot P : cd \cdot p, \text{ o sia } FN : fN = P : p,$$

$$\text{oppure } P : p = cf : CF, \text{ per essere } cf : CF = FN : fN.$$

Vale a dire le sezioni paraboliche, di cui si parla, hanno i loro parametri reciprocamente proporzionali alle porzioni $CF$, $cf$ delle rette $FD$, $fd$, nelle quali vi sono i loro assi, e che sono intercette fra i vertici rispettivi $C$, $c$ e l' asintota $MN$, appunto come ho asserito in secondo luogo.

## Lemma 6.

*Le sezioni verticali e paralelle di una paraboloide ellittica avente le sezioni principali verticali sono parabole fra loro eguali.*

Siano fatte alla paraboloide due sezioni orizzontali per le rette $AB$, $a'b'$ (tav. II, fig. 14), e l' inferiore sia rappresentata dall' ellisse $aebf$; e condotti i tre piani verticali lungo i due diametri conjugati $hm$, $de$ ed alla corda $fg$ paralella alla $de$; ed i punti nell' altra sezione orizzontale analoghi agli $f$, $d$, $t$, -- siano denominati rispettivamente $f'$, $d'$, $t'$, --, ed $L$ quello nel quale la paraboloide viene incontrata dalla verticale che passa per $l$.

Essendo gli angoli $asd$, $a's'd'$ eguali, e le sezioni orizzontali simili, si ha

$$\overline{as}^2 : \overline{a's'}^2 = \overline{ds}^2 : \overline{d's'}^2; \text{ e però } TV : s'V = \overline{ds}^2 : \overline{d's'}^2,$$

per essere in virtù della prima sezione

$$\overline{as}^2 : \overline{a's'}^2 = TV : s'V,$$

cioè tutte le sezioni della paraboloide fatte pel suo asse sono paraboliche.

Similmente, per essere

$$\overline{fl}^2 : ml \cdot lh = \overline{ds}^2 : \overline{sh}^2, \ \overline{f'l'}^2 : m'l' \cdot l'h' = \overline{d's'}^2 : \overline{s'h'}^2,$$

e per la similitudine delle sezioni orizzontali $\overline{ds}^2 : \overline{sh}^2 = \overline{d's'}^2 : \overline{s'h'}^2$ avrassi

$$\overline{fl}^2 : ml \cdot lh = \overline{f'l'}^2 : m'l' \cdot l'h'.$$

Ma per la sezione verticale che passa per $hm$ si ha

$$ml \cdot lh : lL = m'l' \cdot l'h' : Ll'; \text{ adunque sarà } \overline{fl}^2 : lL = \overline{f'l'}^2 : l'L$$

parabolica cioè qualsivoglia sezione piana verticale della paraboloide.

Così, essendo

$$\overline{fl}^2 : \overline{ds}^2 = ml \cdot lh : \overline{sm}^2, ml \cdot lh : \overline{sm}^2 = lL : TV, \text{ si avrà pure}$$

$$\overline{fl}^2 : \overline{ds}^2 = lL : TV.$$

Vale a dire nelle sezioni paraboliche fatte alla paraboloide da due piani verticali e paralelli i quadrati delle ordinate sono geometricamente come le corrispondenti ascisse; quindi le parabole medesime saranno fra loro eguali.

## Lemma 7.

*Saranno altrettante iperbole simili le sezioni fatte ad un' iperboloide dai piani perpendicolari all' ortografico e condotti lungo a rette le cui parallelle tirate pel centro della prima sezione cadono nell' angolo delle asintote della sezione medesima.*

Le sezioni siano fatte lungo le due paralelle $rd$, $RD$ ( tav. XV, fig. 158 ), e conducansi le $GI$, $HL$ paralelle fra loro e seganti le due antecedenti.

Essendo

$$RD \cdot DP : RE \cdot EP = GD \cdot DI : HE \cdot EL \text{, e } GD \cdot DI : HE \cdot EL = D^2 : E^2,$$

$$\text{sarà } RD . DP : RE \cdot EP = D^2 : E^2,$$

e conseguentemente iperbole le sezioni fatte lungo la $PE$ e le sue paralelle.

Sia $Q$ il centro della sezione fatta lungo la $PE$, e la lettera $Q$ indichi il semiasse conjugato al $PR$, e la $N$ l' analogo rispetto alla $rp$.

Per essere

$$RD \cdot DP : rd \cdot dp = GD \cdot DI : Gd \cdot dI = D^2 : d^2,$$

$$\text{sarà } RD \cdot DP : D^2 = rd \cdot dp : d^2.$$

$$\text{Ma } RD \cdot DP : D^2 = \overline{PQ}^2 : Q^2 \text{, ed } rd \cdot dp : d^2 = \overline{pN}^2 : N^2;$$

adunque sarà $\overline{PQ}^2 : Q^2 = \overline{pN}^2 : N^2$, ovvero $PQ : Q = pN : N$; sono adunque simili le iperbole in quistione.

## Lemma 8.

*In fine le sezioni fatte alla medesima superficie di second' ordine con piani perpendicolari alla prima sezione e condotti lungo le due corde paralelle e terminate* CD, cd (*fig.* 159, 160 *e* 161) *sono due ellissi anch' esse fra loro simili.*

Si tiri il diametro $GHh$, che divide pel mezzo le due corde $CD$, $cd$, e lungo di esso s' immagini il piano perpendicolare all' ortografico; la sezione fatta da questo piano alla superficie sarà un' ellisse nell' ellissoide, una parabola nella paraboloide, ed un' iperbola nell' iperboloide, e avrà un diametro comune colla prima sezione; e però nell' ellissoide (fig. 159) ed iperboloide (fig. 160) sarà, indicando colle $H$, $h$ delle linee analoghe a quelle rappresentate colle $M$, $N$, -- nel *lemma quarto*,

$$\overline{CH}^2 : \overline{ch}^2 = FH \cdot HG : Fh \cdot hG \text{, ed } H^2 : h^2 = FH \cdot HG : Fh \cdot hG,$$

$$\text{o sia } \overline{CH}^2 : \overline{ch}^2 = H^2 : h^2,$$

e nella paraboloide (fig. 161) sarà

$$\overline{CH}^2 : \overline{ch}^2 = GH : Gh \text{, ed } H^2 : h^2 = GH : Gh,$$

$$\text{ovvero } \overline{CH}^2 : \overline{ch}^2 = H^2 : h^2.$$

Quindi per tutte queste tre superficie si avrà

$$CH : ch = H : h;$$

vale a dire fra loro geometricamente proporzionali gli assi delle suddette sezioni ellittiche fatte lungo le corde $CD$, $cd$, e conseguentemente queste sezioni fra loro simili; ciò che ecc.

## Lemma 9.

*Nell' ellisse e nell' iperbola dato l' angolo che fa una tangente con un suo asse, e nella parabola quello che fa coll' asse unico della medesima, trovare il punto di contatto.*

Essendo (fig. 162, 163 e 164) dato l' angolo $MTP$ che fa la tangente $MT$ coll' asse $TP$, sarà conosciuto il rapporto delle rette $TP$, $PM$: sia questo $n$, cioè abbiasi $PT = n \cdot PM$. È noto a tutti che nell' ellisse e nell' iperbola si ha

$$TP : BP = AP : CP, \text{ o sia } \overline{TP}^2 : \overline{BP}^2 = \overline{AP}^2 : \overline{CP}^2 \text{; e però sarà}$$

$$n^2 \cdot \overline{PM}^2 : BP \cdot AP = BP \cdot AP : \overline{CP}^2.$$

Come pure si sa che

$$\overline{PM}^2 : BP \cdot AP = \overline{CD}^2 : \overline{AC}^2, \text{ ovvero } n^2 \cdot \overline{PM}^2 : BP \cdot AP = n^2 \cdot \overline{CD}^2 : \overline{AC}^2;$$

adunque per ambedue queste linee si avrà

$$n^2 \cdot \overline{CD}^2 : \overline{AC}^2 = BP \cdot AP : \overline{CP}^2.$$

Ma per l' ellisse si ha evidentemente $BP \cdot AP = \overline{AC}^2 - \overline{PC}^2$, e per l' iperbola $BP \cdot AP = \overline{PC}^2 - \overline{AC}^2$; quindi, ponendo nell' ultima proporzione in vece del rettangolo $BP \cdot AP$ questi suoi valori, e componendo nella risultante, si otterrà

$$\overline{AC}^2 \pm n^2 \cdot \overline{CD}^2 : \overline{AC}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{CP}^2;$$

proporzione che dà immediatamente l' ascissa $CP$ corrispondente al punto di contatto di quella tangente che fa coll' asse $AC$ l' angolo dato.

Nella parabola si ha $TP = 2 \cdot AP$, e per supposizione $TP = n \cdot PM$, o sia $PM = \frac{TP}{n}$; adunque sarà $PM = \frac{2}{n} AP$. Ma nella medesima curva si ha anche $\overline{PM}^2 = P \cdot AP$, $P$ indicando il suo parametro; adunque sarà $\frac{4}{n^2} \cdot \overline{AP}^2 = P \cdot AP$; equazione dalla quale si desume l' ascissa dimandata $AP = \frac{n^2}{4} \cdot P$.

Osservazione 1. Chiamate $ac$, $cd$, $cp$ le linee di un' ellisse di un' iperbola analoghe alle tre $AC$, $CD$, $CP$ delle figure 162 e 163, cioè $ac$, $cd$ i semiassi, e la $cp$ l' ascissa corrispondente al suo punto di contatto colla tangente che fa coll'asse $ac$ l' angolo eguale alla $MTP$; e replicando per queste nuove linee i ragionamenti fatti superiormente, si avrà

$$\overline{ac}^2 \pm n^2 \cdot \overline{cd}^2 : ac^2 = \overline{ac}^2 : \overline{cp}^2.$$

Ora da questa proporzione e dalla precedente si desumano le equazioni

$$\left(\frac{AC}{CP}\right)^2 = 1 \pm n^2 \left(\frac{CD}{AC}\right)^2, \left(\frac{ac}{cp}\right)^2 = 1 \pm n^2 \left(\frac{cd}{ac}\right)^2,$$

le quali danno $CP : AC = cp : ac$, qualora sia $CD : AC = cd : ac$; vale a dire le ellissi o le iperbole fra loro simili. Adunque nell' ellissi e nelle iperbole simili le ascisse $CP$, $cp$, non che le ordinate corrispondenti ai punti di contatto di quelle tangenti che fanno angolo fra loro eguali cogli assi omologi, avranno con questi assi rapporti geometrici fra loro eguali.

Così, nominato $p$ il parametro di un' altra parabola, ed $ap$ l' ascissa analoga alla $AP$ (fig. 164) e corrispondente al punto di contatto della tangente che fa l' angolo eguale all' $MTP$ col prolungamento dell' asse, si avrà $ap = \frac{n^2}{4} p$, e combinando quest' equazione alla stessa $AP = \frac{n^2}{4} \cdot P$, si otterrà la proporzione $AP : ap = P : p$, la quale esprime che le ascisse suddette sono proporzionali ai parametri di esse parabole.

Osservazione 2. Quantunque non sarà difficile pel disegnatore la determinazione dell' ascissa $AP$ in parti del modulo del suo disegno col sostituire alle rette date $AC$, $CD$ le loro misure in parti del modulo medesimo, nulladimeno ecco come si può avere altrimenti la posizione del punto $P$ coll' ajuto della riga e del fedel compasso, senza passare all' anzidetta nojosa sostituzione; e ciò per l' ellisse e per l' iperbola, le quali sono le due di queste tre linee che s' incontrano più spesso nelle arti.

## Lemma 10.

*Dati due assi di un' ellisse, e l' angolo che deve fare una sua tangente con uno di essi, trovare l' ascissa su quest' asse corrispondente al punto di contatto.*

Siano $bd$, $de$ i due semiassi dati (fig. 165).

Facendo centro in $d$, si descriva il quadrante circolare $bhf$, si tirino le rette $fg$, $ne$ perpendicolari alla $df$; facciasi l' angolo $fdg$ eguale al dato, e la retta $ne$ eguale alla $gf$; uniscasi $dnh$, e conducasi $hc$ perpendicolare alla $bd$, e si avrà nella $dc$ l' ascissa cercata.

Si tiri $am$ tangente l' arco $bme$ nel punto dove è segato dalla $hc$, ed uniscasi $ah$.

I triangoli simili $ahc$, $ned$ danno $ac : ch = de : ne$, ovvero $gf$; e la notissima proprietà delle ordinate $hc$, $mc$ corrispondenti dell' ellisse e del circolo somministra $ch : cm = df : de$; adunque sarà $ac : cm = df : gf$, cioè l'angolo $mad$ eguale all' $fdg$ o sia al dato; quindi $cd$, ecc.

Corollario. Condotta $ha$ perpendicolare alla $hd$, e poscia $am$ perpendicolare alla $dg$; quest' ultima sarà evidentemente quella tangente dell' ellisse, la quale fa coll' asse $ad$ l' angolo eguale al dato, ed $m$ il punto di contatto.

## Lemma 11.

*Dato l' asse, il vertice ed un altro punto di una parabola, trovare l' ascissa presa dal vertice e nell' asse, la quale corrisponda al punto di contatto di essa parabola con una retta facente coll' asse un angolo dato.*

Sia $xa$ l' asse (fig. 166) della parabola, $x$ il suo vertice, e $b$ l' altro punto dato di essa.

Si tiri $ba$ perpendicolare alla $xa$, e si faccia l' angolo $bea$ eguale all' angolo dato; indi si seghi $ac$ quadrupla della $ax$, e conducasi $en$ perpendicolare alla $ce$, la $na$ eguaglierà l' ascissa dimandata.

Essendo $4na = \frac{\overline{ae}^2}{ax}$, e $P$ parametro della parabola eguale ad $\frac{\overline{ab}^2}{ax}$, sarà $\frac{P}{4na} = \left(\frac{ba}{ae}\right)^2$. Ma $\frac{P}{4na}$ esprime evidentemente il quadrato della tangente trigonometrica dell' angolo fatto coll' asse $xa$ dalla toccante la parabola nel punto a cui corrisponde l' ascissa eguale alla $an$, ed $\left(\frac{ab}{ae}\right)^2$ il quadrato della tangente dell' angolo $bea$; adunque ecc.

## Lemma 12.

*Le sezioni fatte alla solita iperboloide a due foglie con piani paralelli e verticali sono tante iperbole e simili fra loro.*

Faccio uso della medesima figura decimaquarta, tav. II, ritengo tutte le convenzioni dichiarate nel *lemma sesto*, più chiamo $V'$ il vertice dell' iperbola opposta alla prima sezione, ed $L'$ il punto dove la verticale $lL$ incontra l' iperbola opposta alla sezione fatta alla foglia inferiore lungo la $hm$.

La prima sezione dà $as^2 : a's'^2 = VTV' : V't'V'$, e la somiglianza delle sezioni orizzontali dell' iperboloide insieme all' eguaglianza degli angoli $asd$, $a's'd'$ somministra

$$\overline{as}^2 : \overline{a's'}^2 = \overline{ds}^2 : \overline{d's'}^2; \text{ adunque sarà } \overline{ds}^2 : \overline{d's'}^2 = VTV' : Vt'V',$$

cioè iperbole tutte le sezioni fatte all' iperboloide dai piani che passano pel suo asse verticale.

Essendo $\overline{fl}^2 : \overline{f'l'}^2 = mlh : m'l'h'$, ed anche $mlh : m'l'h' = LlL' : Ll'L'$, sarà

$$\overline{fl}^2 : \overline{f'l'}^2 = LlL' : Ll'L';$$

e conseguentemente tutte le sezioni fatte all' iperboloide con piani verticali saranno altrettante iperbole.

In ultimo, siccome $mlh : \overline{sh}^2 = LlL' : VTV'$,

$$\text{ed } mlh : \overline{sh}^2 = \overline{lf}^2 : \overline{ds}^2 \text{; così avrassi}$$

$$\overline{lf}^2 : \overline{ds}^2 = LlL' : VTV';$$

vale a dire simili le sezioni fatte ad un' iperboloide da piani verticali condotti lungo le rette $de$, $fg$, o sia in generale simili tutte le sezioni piane verticali e paralelle; ciò che ecc.

## Lemma 13.

*Essendo piana una delle due sezioni di due superficie di second' ordine, lo sarà anche l' altra.*

Riferite ambedue le superficie ai medesimi tre piani coordinati, e nominate $x$, $y$, $z$ le coordinate di un punto qualunque di una di esse, ed $s$, $t$, $u$ le analoghe dell' altra, saranno

$$y^2 + Ax^2 + Bz^2 + Cxy + Dxz + Eyz + Fy + Gx + Hz + L = 0,$$
$$t^2 + as^2 + bu^2 + cst + dsu + etu + ft + gs + hu + l = 0$$

le loro equazioni: $A$, $a$, $B$, $b$, $C$, -- esprimono le quantità da cui dipendono le posizioni e dimensioni delle medesime superficie.

Facendo in queste equazioni $z$ ed $u$ eguali a zero, si ottiene

$$y^2 + Ax^2 + Cxy + Fy + Gx + L = 0,$$
$$t^2 + as^2 + cst + ft + gs + l = 0$$

per equazioni delle intersecazioni del piano delle coordinate $(y, x)$ e delle superficie di second' ordine; e però, supposto che il piano delle $x, y$ sia quello della linea piana comune alle due superficie, le equazioni anzi esposte saranno simili, o sia sarà

$$A=a,\ C=c,\ F=f,\ G=g,\ \text{ed}\ L=l.$$

Quindi le equazioni delle due superficie di second' ordine riferite a questi piani coordinati saranno

$$y^2+Ax^2+Bz^2+Cxy+Dxz+Eyz+Fy+Gx+Hz+L=0,$$

$$t^2+As^2+bu^2+Cst+dsu+etu+Fs+Gt+hu+L=0.$$

Pertanto riferendo anche le linee comuni alle due superficie di second' ordine a questi ultimi piani coordinati, e denominando $x', y', z'$ le coordinate analoghe alle $x, y, z$ di un loro punto qualunque, saranno esse linee espresse dalle seguenti equazioni:

$$y'^2+Ax'^2+Bz'^2+Cx'y'+Dx'z'+Ey'z'+Fy'+Gx'+Hz'+L=0,$$

$$y'^2+Ax'^2+bz'^2+Cx'y'+dx'z'+ey'z'+Fy'+Gx'+hz'+L=0,$$

oppure da altre dedotte da queste e loro equivalenti.

Sottraendo la seconda di queste equazioni dalla prima, si ha

$$\{(B-b)z'+(D-d)x'+(E-e)y'+H-h\}z'=0,\ \text{cioè o}$$

$$z'=0,\ \text{ovvero}\ (B-b)z'+(D-d)x'+(E-e)y'+H-h=0.$$

Ora le linee comuni alle due superficie debbono avere la proprietà di soddisfare l' una o l' altra di queste ultime equazioni; adunque, siccome la $z'=0$ è evidentemente una proprietà esclusiva a quella che trovasi nel piano delle $x', y'$, l' altra linea comune alle medesime superficie soddisfarà la seconda, cioè

$$(B-b)z'+(D-d)x'+(E-e)y'+H-h=0;$$

e conseguentemente sarà piana anch' essa; ciò che è d' altronde evidente.

## Lemma 14.

*Determinare quanti punti si vogliono della periferia ellittica avente per due semidiametri conjugati le rette* ab, bc (*tav. XV, fig.* 167).

Sulla $ae$ doppia della $ab$ si descriva la semiperiferia circolare $ame$, e si tiri $bd$ perpendicolare alla stessa $ae$, e congiungasi $cd$: fatto ciò, si conducano le $mn$, $mr$, $nr$ paralelle rispettivamente alle $bd$, $cd$, $bc$, e sarà $r$ un punto della periferia ellittica dimandata.

I triangoli simili $bcd$, $mnr$ danno $bc:bd=nr:mn$, ovvero $\overline{bc}^2:\overline{bd}^2=\overline{nr}^2:\overline{nm}^2$; e però, essendo $ab=bd$, ed $\overline{mn}^2=an\cdot ne$, sarà $\overline{bc}^2:\overline{ba}^2=\overline{nr}^2:an\cdot ne$, che è una proprietà caratteristica dei singoli punti appartenenti all' ellisse avente per due semidiametri conjugati $ab$, $bc$. Ma come si è determinato il punto $r$, si possono trovare anche gli altri della medesima ellisse; adunque ecc.

## Lemma 15.

*Senza descrivere l'ellisse che ha per assi* ab, cd, *trovare i suoi segamenti colle rette* aif, drg *paralelle ad una data* (*fig.* 168).

Descritta la periferia circolare $alsbq$, si prenda $eh = ec$, congiungasi $hi$, ed a questa tirisi la paralella $al$, e dal punto $l$ la retta $lp$ perpendicolare all' asse $ab$, che il punto $m$ d'incontro di essa colla data $fa$ sarà lo stesso punto dove quest' ultima incontrerebbe la detta ellisse.

Imperciocchè, essendo $lp : mp = ne : ie$, ed $ne : ie = ae : he$, ovvero come $ae : ec$, sarà $lp : mp = ae : ec$; e perciò il punto $m$ apparterrà alla periferia ellittica avente per assi $ae$, $ec$.

Così, tirata $qrs$ e la $st$ perpendicolare all' asse $ab$, si avrà nel suo segamento $x$ colla $dg$ l'altro punto richiesto, per essere $st : xt = eq : ed$; e però $st : xt = ae : de$.

## Lemma 16.

*Dato l'asse ed il vertice di una parabola, non che un altro punto di essa, per cui passa una data retta, determinare l'altro punto comune ad esse linee senza delineare la parabola.*

Sia $ab$ (fig. 169) l' asse, $a$ il vertice della parabola; $rd$ sia la retta data, ed $r$ il punto dato comune a questa retta ed alla parabola.

Conducasi $rf$ perpendicolare all' asse, $rb$ alla retta $ra$; si prendano $an$, $am$ amendue eguali alla quarta parte della $fb$; tirinsi le $mu$, $nc$ perpendicolari rispettivamente alla $bm$ asse, ed alla $rd$ retta data; indi si tiri $ct$ paralella alla $mb$, e si seghi $td$ eguale alla $rt$; $d$ sarà il punto richiesto, cioè l'altro punto comune alla retta ed alla parabola.

Si tirino $du$, $rs$ paralelle all' asse, ed uniscasi $rn$.

Essendo $an$, $am$ entrambi un quarto della $fb$ parametro della parabola, sarà $n$ il suo fuoco, ed $mu$ la direttrice; e però $rn = rs$.

Sia $h$ il nuovo segamento della retta $cn$ e della periferia circolare che ha il centro in $r$, ed il raggio $rn = sr$, e sarà $nc \cdot ch = \overline{cs}^2 = \overline{cu}^2$. Ma $\overline{ud}^2 + \overline{uc}^2 = \overline{xd}^2 + \overline{cx}^2 = \overline{xd}^2 + cn \cdot ch + \overline{hx}^2$, o sia $\overline{ud}^2 + \overline{uc}^2 = \overline{hd}^2 + cn \cdot ch$; adunque

$$\overline{ud}^2 = \overline{hd}^2\text{, ovvero } ud = hd = nd;$$

quindi il punto $d$ sarà anch' esso nella parabola, come ho asserito.

Osservazione. Se il punto $r$ cadesse in $a$ vertice della parabola, per avere il punto $d$ bisognerebbe conoscere o il parametro di essa, ovvero un altro punto col quale si determinerebbe il parametro medesimo, facendo per questo punto dato ciò che si è fatto sopra per l' $r$: conoscendosi il parametro, si procederà alla determinazione del fuoco, della direttrice e dello stesso punto $d$ richiesto precisamente, come sopra si è fatto.

In questo caso medesimo, se l' angolo fatto dalla retta data coll' asse della parabola eguaglierà quello che fa la diagonale di un cubo con una sua faccia, sarà evidentemente,

supposto $dv$ perpendicolare alla $mv$, $\overline{dv}^2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{va}^2$. Ma per la parabola si ha $\overline{dv}^2 = bf \cdot av$; adunque avrassi $\frac{1}{2}\, \overline{va}^2 = va \cdot bf$, o sia $va = 2bf$; quindi, segata l'ascissa $av$ doppia della $fb$, e condotta $vd$ perpendicolare all' asse, si avrà immediatamente il segamento $d$.

## Lemma 17.

*Essendo* ABC, abc (*tav. XVI, fig.* 170) *due semiperiferie ellittiche simili, ed* AC, ac *due loro assi omologi, e gli angoli* CAM, cam *eguali, e le rette* PM, pm *perpendicolari alle* AC, ac, *sarà*

$$AP : ap = AC : ac.$$

Siano $BD$, $bd$ altri due semiassi omologi.

Nelle proporzioni $\overline{PM}^2 : AP \cdot PC = \overline{BD}^2 : \overline{AD}^2$,

$$\overline{pm}^2 : ap \cdot pc = \overline{bd}^2 : \overline{ad}^2$$

date dalle curve, per essere eguali i secondi rapporti in virtù della simiglianza delle linee medesime, sarà

$$\overline{PM}^2 : AP \cdot PC = \overline{pm}^2 : ap \cdot pc.$$

Ma dai triangoli simili $APM$, $apm$ si ha

$$\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 = \overline{AP}^2 : \overline{ap}^2 ;$$

adunque si avrà $\overline{AP}^2 : \overline{ap}^2 = AP \cdot PC : ap \cdot pc$, oppure $AP : ap = PC : pc$; e però componendo si otterrà $AP : ap = AC : ac$.

Corollario. Se le periferie, in vece di essere ellittiche, fossero circolari, le rette $AP$, $ap$ sarebbero come i diametri e come i raggi di esse periferie.

Osservazione. Per le iperbole simili (fig. 171) si dimostra, come si è fatto per le ellissi, che $AP : ap = CP : cp$. In questa proporzione, dividendo, si ottiene la seguente $AP : ap = AC : ac$, la quale esprime una proprietà delle iperbole affatto simili all' anzi esposta per le ellissi.

## Lemma 18.

*Descrivere l'ellisse di cui si conosce un asse, ed un punto per cui deve passare.*

Sia $ab$ l'asse, ed $u$ il punto dato (fig. 172).

Si descriva la semiperiferia circolare $acb$, si tiri $duf$ perpendicolare al suo diametro, si costruisca il triangolo equilatero $ghl$ (fig. 173) sulla $gl$ eguale alla $df$, prendasi $ig$ eguale alla $uf$, e si tiri $hi\delta$: fatto questo, tirinsi le $mn$, $rs$,-- perpendicolari alla $ab$, si prendano $h1 = h2 = mn$, $h3 = h4 = rs$,--, ed uniscansi le 12, 34, --; indi si seghino $nt$, $sx$, -- eguali ordinatamente alle $1\alpha$, $3\beta$, --, ed avransi i punti $f$, $x$, -- dell'ellisse dimandata.

Imperciocchè, per essere le rette 12, 34, -- $gl$ paralelle, i rapporti $12 : 1\alpha$, $34 : 3\beta$, -- sono tutti fra loro eguali; e però $df : uf = mn : fx = rs : sx =$ ecc.; quindi i punti $u$, $s$, $x$, -- appartengono all' ellisse dimandata.

Corollario. Condotta pel punto $p$ di mezzo della $ab$ la $pc$ perpendicolare ad essa $ab$, e presa $\lambda h = \mu h = cp$, congiunta $\lambda\mu$; indi segata $pq$ eguale a $\lambda\delta$, oppure unita $cdz$, e poscia $zuq$, si otterrà nella $pq$ l' altro semiasse della periferia di cui si parla. Così, unito il punto $q$ al segamento dei prolungamenti delle $cr$, $ab$, si avrà una retta che incontrerà la $rs$ nello stesso punto $x$ sopra determinato: in un modo affatto affatto simile potransi avere anche i punti $t$, $u$, ecc.

### Lemma 19.

*Nelle parabole* ACD, acd (*fig.* 174), *che hanno i vertici in* A, a, *e per assi le rette* AP, ap, *essendo gli angoli* DAP, dap *eguali*, *tanto le ascisse* AP, ap, *quanto le ordinate* PD, pd *corrispondenti ai segamenti* D, d *saranno geometricamente proporzionali ai parametri delle medesime.*

I triangoli simili $ADP$, $adp$ danno $AP:PD = ap:pd$; la proprietà caratteristica delle parabole somministra

$$AP:PD = PD:P\,,\quad ap:pd = pd:p\,,$$

$P$, $p$ indicando i parametri di esse; e però sarà $PD:P:pd:p$,

o sia $P:p = PD:pd$, o come $AP:ap$; ciò che ecc.

### Lemma 20.

*Trovare il punto ove la retta* BM (*tav. XVII*, *fig.* 175) *incontra nuovamente l' iperbola che ha per due semidiametri conjugati* BC, CD.

Si estenda la retta $BM$ sino alla $CD$, e la $CB$ di $AC = BC$; si tiri $CF$ perpendicolare alla $AB$ ed eguale alla $CD$, facciasi $FG = CE$, ad essa la perpendicolare $CH$ e la paralella $AL$; si prenda $AI = GH$, $IL = HF$, congiungasi $BI$, e si conduca a questa la paralella $LP$, indi si tiri $PM$ paralella alla $CD$, che il segamento $M$ di essa colla data $BM$ sarà il punto dimandato.

La retta $BP$ si potrà determinare anche in quest' altra maniera:

Si trovi la terza proporzionale geometrica alle rette $DE$, $CD$, indi si determini la quarta proporzionale, pure geometrica, alle rette $CE + CD$, $AB$, e la terza proporzionale qui trovata; e questa quarta proporzionale sarà la lunghezza della retta $BP$.

Non espongo le dimostrazioni di queste due regole perchè sono esse immediate conseguenze delle notissime proprietà dell' iperbola.

---

## Lemma 21.

*Dati due semidiametri conjugati di un' ellisse ed un terzo qualunque, trovare il conjugato di questo senza descrivere la periferia ellittica.*

Siano $AB$, $BC$ (tav. XII, fig. 176) i due dati semidiametri conjugati, e $BD$ sia il terzo, quello cioè di cui si dimanda il conjugato.

Colla regola notissima trovisi $ED$ tangente l' ellisse, e pel centro tirisi ad essa la paralella $BF$: in questa retta cadrà evidentemente il semidiametro conjugato dimandato.

Per avere la lunghezza di questo semidiametro, si faccia (tav. XIV, fig. 177) $ab = AB$, $abc = ABC$, $bc = BC$, $abf = DBF$, $bn = BD$; tirinsi $ad$, $cd$, $ai$, $nh$ paralelle rispettivamente alle $bc$, $ab$, $bf$, ed uniscasi $bgi$; indi conducasi $if$ paralella anch' essa alla $ab$, e sarà $bf$ la lunghezza dimandata, e per conseguenza $BF = bf$ il semidiametro conjugato richiesto.

Di fatto, essendo il paralellogramma $nm$ equivalente all' $fg$, si ha l' $nbfh$ equivalente all' $abrm$, ovvero all' $abcd$, il quale è compreso dalle $ab$, $bc$ eguali ai semidiametri conjugati $AB$, $BC$; quindi sarà $bf$ la lunghezza del semidiametro conjugato a quello che uguaglia $bn$, cioè di $BD$ per la notissima proprietà singolare dell' ellisse che i paralellogrammi compresi dai semidiametri conjugati sono tutti fra loro equivalenti. Questo *lemma* si estende anche all' iperbola.

## Lemma 22.

*I tre punti* G, H, L *segamenti (tav. XVII, fig. 178) delle corde* AE, BF; AD, CF; CE, BD *del medesimo circolo* ACE *sono in una stessa retta linea* ST.

Congiunte le $AF$, $CD$, e tirate le $GI$, $LP$, $GM$, $LQ$, $GN$, $LR$ perpendicolari rispettivamente alle $AD$, $CF$, $AF$, $CD$ sulle quali cadono, si hanno i triangoli $GAI$, $GAN$, $GFM$, $GFN$ simili ai quattro $CLR$, $CLQ$, $DLR$, $DLP$ ciascuno a ciascuno; e però sarà

$$GI : GA = LR : CL,\ AG : GN = CL : LQ,$$

$$GM : GF = LR : DL,\ \text{ed}\ FG : GN = LD : LP;$$

ma moltiplicando i termini delle prime due di queste proporzioni, si ha

$$GI : GN = LR : LQ;$$

e moltiplicando quelli delle altre due, si ha in vece

$$GM : GN = LR : LP;\ \text{adunque sarà}$$

$$GI : GM = LP : LQ,$$

proporzione la quale esprime che i punti $G$, $H$ ed $L$ sono in linea retta; ciò che ecc.

Osservazione. Nella proposizione enunciata e nella sua dimostrazione ho supposto il punto $B$ tra $A$ e $C$, ed il $C$ tra $B$ e $D$, ecc.; cioè ho ammesso tacitamente i punti $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ collocati successivamente l' uno dopo l' altro: questa particolare disposizione di sei punti denominati $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ ed $F$ non è necessaria nè per l' enunciato della proposizione, nè per la sua dimostrazione; giacchè qualunque sia la disposizione dei sei punti $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ della circonferenza $ACE$, dimostrasi sempre ed in una maniera consimile a quella usata qui sopra, che i segamenti delle corde $AE$, $BF$; $AD$, $CF$; $BD$, $CE$ sono in una sola e medesima retta linea.

### LEMMA 23.

*Le corde* A′E′, B′F′; A′D′, C′F′; B′D′, C′E′ *di una medesima linea di second' ordine qualunque si segano in tre punti situati in una stessa retta.*

Sia *ACE* (fig. 178) una delle sezioni circolari di una delle superficie coniche ordinarie che passano per la linea di second' ordine *A′E′C′* data, ed *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* siano gl' incontri di questa sezione circolare con quei lati della superficie conica medesima che passano per gli *A′*, *B′*, *C′*, *D′*, *E′*, *F′* della linea di second' ordine *A′E′C′*.

Le corde *A′E′*, *B′F′*; *A′D′*, *C′F′*; *B′D′*, *C′E′* della linea di second' ordine essendo evidentemente nei piani che passano pel vertice del cono immaginato e per le rette *AE*, *BF*; *AD*, *CF*; *BD*, *CE*, i segamenti delle corde *A′E′*, *B′F′*; *A′D′*, *C′F′*; *B′D′*, *C′E′* saranno nelle rette che uniscono i punti *G*, *H*, *L* al medesimo vertice; ma queste, per essere i loro termini *G*, *H* ed *L* in linea retta, trovansi tutte nel piano passante pel vertice e per la *ST*; adunque i tre segamenti anzidetti, cioè quelli delle corde *A′E′*, *BF′*; *A′D′*, *C′F′*; *B′D′*, *C′E′*, saranno essi pure in questo medesimo piano, e conseguentemente in linea retta, giacchè sono anche nel piano della stessa linea di second' ordine.

COROLLARIO. Se i tre segamenti delle rette *A′E′*, *B′F′*; *A′D′*, *E′F′*; *B′D′*, *C′E* saranno in una medesima retta, i sei punti *A′*, *B′*, *C′*, *D′*, *E′*, *F′* troveransi in una stessa linea di second' ordine, o sia uno qualunque di essi sarà nella linea di second' ordine che passerà per gli altri cinque.

### LEMMA 24.

*Dati cinque punti di una linea di second' ordine ed una retta che passa per uno di essi, trovare l' altro punto comune a questa retta ed alla medesima linea di second' ordine, senza descrivere quest' ultima linea.*

Siano *A*, *B*, *E*, *D* ed *F* (tav. XVIII, fig. 179) i cinque punti conosciuti della linea di second' ordine, ed *EC* la retta data.

Si congiungano *AE*, *AD*, *BF*, *BD*, indi *GL*; e pel segamento *H* delle *GHL*, *AHD* si tiri la *FHC*, e si prolunghi sino ad incontrare la data *EC*, ed avrassi in *C* il segamento della retta *CE* colla linea di second' ordine, qualunque essa sia, che passa pei cinque punti *A*, *B*, *E*, *D* ed *F*.

### LEMMA 25.

*Determinare quanti punti si vogliono della linea di second' ordine che passa per cinque punti dati.*

Siano (fig. 179) rappresentati i cinque punti dati dagli *A*, *B*, *D*, *E* ed *F* come nel *lemma* precedente.

Si tirino pel punto *E* tante rette *EC*, *E*2, *E*3, - - quanti punti si vogliono della linea di second' ordine, e si congiungano le rette *AE*, *AD*, *BF*, *BD* come nel *lemma* antecedente, e si trovino i punti della *AD*, i quali sono nelle rette *GL*, *Gn*, *Gr*, - -; indi uniscansi questi punti *H*, 4, 5, - -

col dato $F$, ed estendansi quest' ultime sino ad incontrare le prime $EC$, $E2$, $E3$, --, e si avranno nei segamenti $C$, 2, 3, -- altrettanti punti appartenenti alla linea dimandata.

Osservazione. Ommetto le dimostrazioni anche di queste ultime determinazioni perchè sono immediate conseguenze del corollario del *lemma vigesimoterzo.*

## Lemma 26.

*Data l'ortografia* AVB (*tav. XVII, fig.* 180) *di una superficie di second' ordine avente verticale l'asse* VT, *e date le icnografie* CT, FT *degli assi di una sua individuata sezione orizzontale, trovare cinque punti* 1, 2, 3, 4, 5 (*fig.* 181) *posti in un medesimo piano, i quali siano disposti fra loro, come sono i cinque della sezione fatta ad essa superficie dal piano perpendicolare all'ortografico e condotto lungo la retta* IKZ *data.*

Si trovi il punto $D$ di contatto fra l'ellisse che ha per semiassi $CT$, $FT$, e la retta $AD$ perpendicolare all'orizzontale $AB$, coll' osservazione seconda della proposizione terza della parte seconda o col corollario del *lemma decimo*; uniscasi il diametro $DT$, e trovisi la lunghezza del suo conjugato $ET$, *lemma ventesimoprimo*, e seghisi $Te = ET$; indi si tirino le orizzontali $OMPQ$, $KN$, e le verticali $Iai$, $MHbm$; congiungansi le $BNG$, $BQR$, e poscia le $Gce$, $RSe$; si faccia $PH = PQ$, la verticale $QU = HM$; uniscasi $PUX$, e si determini il punto $X$ colla verticale $SX$: fatto ciò, si seghi $k6 = KM$, $k7 = KI$, e la 71 eguale all' $ai$ e perpendicolare alla $uz$; tirinsi le $2a3$, $4k5$ perpendicolari anch' esse alla $uz$, prendasi $a2 = a3 = SX$, $k5 = k4 = Kc$, ed avransi in 1, 2, 3, 4, 5 i cinque punti dimandati.

Essendo $AD$ perpendicolare alla $AB$ e tangente l' ellisse che ha per semiassi $CT$, $FT$, sarà $DTr$ l' icnografia della sezione verticale avente per ortografia la stessa $AVB$ della superficie di second' ordine; e però la retta $iTr - IKZ$ rappresenterà quel diametro della sezione in quistione il quale ha un termine in $i - I$; e le rette tirate pe' punti $K$, $M - m$ perpendicolarmente al piano ortografico, e che hanno i termini nella superficie di second' ordine, saranno segate pel mezzo del diametro stesso $IZ - ir$, per essere paralelle alla retta tangente la sezione medesima nel punto $I - i$.

Così, per essere $k6 = KM$, $k7 = KI$, e $71 = ai$ e perpendicolare alla $kz$, l' angolo $k17$ eguaglierà quello compreso dal diametro $IZ - ir$ e dalla tangente anzidetta tirata pel punto $I - i$; e le $k1$, $ka$ saranno le lunghezze delle parti del medesimo diametro intercette fra il punto $K$ e gli $M - m$, $I - i$; e perciò ponendo il piano della sezione in quistione sul piano $uhy$, ed in modo che nella $k1$ cada il diametro $IK - iT$, secondo le rette $2a3$, $5k4$ cadranno quelle tirate pei punti $M - m$, $K$, e delle quali si è parlato dianzi.

Ora, per essere tanto le rette $BT$, $KN$, $PQ$, quanto le $ET$, $K$, $P$ diametri omologi delle sezioni simili orizzontali che passano pei punti $T$, $K$, $P$, si ha

$$BT : ET = KN : K = PQ : P;$$

e per costruzione si ha $BT : Te$, ovvero $TE = KN : Kc = PQ : PS$; adunque sarà $Kc = K$, e $PS = P$; cioè le distanze fra i punti $P$, $K$ alla superficie di second' ordine eguali rispettivamente alle $Kc$, $PS$ sopra determinate.

Similmente, nominando $2M$ la corda comune alle sezioni fatte alla superficie di second' ordine lungo le $OQ$, $IZ$ e perpendicolari al piano ortografico, avrassi, per essere la prima di esse sezioni un' ellisse,

$$\overline{PQ}^2 : P^2 = OM \cdot MQ : M^2, \text{ o sia } \overline{PQ}^2 : \overline{PS}^2 = \overline{MH}^2 \text{ oppure } \overline{QU}^2 : M^2; \text{ e perciò}$$

$$PQ : PS = QU : M.$$

Ma si ha evidentemente $PQ : PS = QU : SX$; adunque sarà $M = SX$. Quindi, essendo $a2 = a3 = SX$, e però eguale ad $M$, e $k5 = k4 = Kc$, e conseguentemente alla $K$, i cinque punti 1, 2, 3, 4, 5, i quali sono in uno stesso piano, saranno disposti come sono i cinque della sezione in quistione, i quali cadono in $I - i$, e nei termini delle corde, le cui metà si sono denominate rispettivamente $M$, $K$; ciò che ecc.

Corollario 1. Trovato il segamento $y$ della retta $38y$ e della linea di second' ordine che passa pei punti 1, 2, 3, 4, 5, ora conosciuti, *lemma ventesimoquarto*; e condotta $yz$ perpendicolare alla $uz$, indi segata $KZ$ eguale alla $kz$, nel punto $Z$ si avrà evidentemente l' ortografia di quello della superficie di second' ordine, in cui sarebbe essa incontrata nuovamente dalla retta tirata pel termine anteriore della corda $2M$ che ha l' ortografia nella $IZ$ e fa colla stessa $IZ$ l' angolo eguale al 683.

Se quest' ultima retta fosse paralella alla $O - I$, $Z$ sarebbe l' ortografia del punto della superficie di second' ordine, nel quale cadrebbe l' ombra portata dal termine anteriore della suddetta corda $2M$.

Corollario 2. Se la superficie di second' ordine sarà collocata in modo che $AVB$ rappresenti una delle sue principali sezioni, per esempio quella avente $CT$ per icnografia, sarà nullo l' angolo $1ku$; e però $k1$ cadrà nella stessa $uk$. E nel caso che la medesima superficie sia di rotazione, oltre le proprietà qui enunciate, sarà anche $K = KN$, ed $M = MH$; quindi i cinque punti 1, 2, 3, 4, 5 determinabili facilissimamente.

## Lemma 27.

*Data la traccia ortografica* MFL (*tav. IX*, *fig.* 87) *di una superficie cilindrica che ha le rette generatrici paralelle alla* O – I *comunque diretta, trovare la traccia che fa la medesima superficie al piano verticale passante per* M *e perpendicolare alla retta orizzontale* ML, *comune ai piani ortografico ed icnografico.*

Dai termini della verticale $DF$ si tirino le $FG$, $DE$ paralelle rispettivamente alle $O$, $I$, si prenda l' orizzontale $GO$ eguale alla $ME$, ed $O$ sarà un punto della traccia richiesta, ammesso che siasi adattata al piano ortografico col rotare intorno alla verticale $MG$: gli altri punti di essa traccia si avranno in un modo affatto simile, ovvero unendo la $FO$, e tirando poscia le $fg$, $go$, $fo$ paralelle ordinatamente alle $FG$, $GO$, $FO$, giacchè o segamento delle ultime due di queste sarà anch' esso un punto della traccia medesima. Questo secondo modo richiede nelle operazioni una grande precisione per essere acuti gli angoli $FOG$, $fog$, ecc.

Si supponga condotta la verticale *df*, la *de* paralella alla *I*, e le *DF*, *df* estese sino in *N*, *n*.

Essendo le rette *DE*, *FG* paralelle alle *I*, *O*, saranno *E*, *G* le projezioni del punto d' incontro del piano che passa per *M* perpendicolarmente alla *ML* colla retta paralella alla *I — O* condotta pel punto *F*; e perciò la distanza da questo incontro al piano *MFL* o sia al punto *G* sarà eguale alla *ME*. Quindi essendosi fatta l'orizzontale $GO = ME$, il punto *O* determinato sopra sarà della traccia in quistione, supposto che la medesima siasi adattata al piano ortografico mediante una rotazione fatta attorno alla verticale *MG*.

La costruzione dà $GO : go = GF : gf = GN : gn = ME : Me$,

cioè $GO : go = ME : Me$;

e però, per essere $GO = ME$, sarà anche $go = Me$. Quindi il punto *o* determinato sopra apparterrà anch' esso alla traccia dimandata al pari dell' *O*.

Corollario. Se l' angolo *MDE* sarà semiretto, si avrà $MD = ME$, e però il punto *O* coinciderà coll' *N* del prolungamento della *DF*; e se sarà anche semiretto *MGF*, si avrà di più $FN = GN$; e pertanto, fatte le verticali *NF*, *nf* eguali rispettivamente alle distanze *FR*, *fr* dei punti *F*, *f* dalla verticale *MG*, avransi in *N*, *n* immediatamente altrettanti punti della traccia di cui si parla.

## Lemma 28.

*Trovare la traccia ortografica della superficie cilindrica che ha le rette generatrici paralelle alla medesima retta* O — I, *e per direttrice la curva colla quale si confonde la* BTL (*tav. X*, *fig.* 91) *facendo un quarto di rotazione indietro attorno alla verticale* AB.

Si tiri *AP* paralella alla *O*, si faccia $A\Delta = AC$, $\Delta E$ paralella alla *I*, *EFG* verticale, e la sua parte *FG* eguale alla verticale *CD*, e *G* sarà un punto della traccia richiesta: anche per questa traccia gli altri suoi punti si potranno determinare come il punto *G*, oppure operando con grande precisione, conducendo *cf* paralella alla *CF*, e facendo la verticale *fg* eguale alla *cd*, giacchè il punto *g* e gli altri similmente determinati apparterranno ad essa traccia.

S' immagini la figura *BTL* collocata nella direttrice, e si comprenderà, per essere $A\Delta = AC$, $\Delta E$ paralella alla *O*, ed *EF* verticale, che *F* sarà l'incontro del piano ortografico colla paralella alla *I — O* tirata per la nuova posizione del punto *C*; e però, siccome la *FG* è paralella ed eguale alla *CD*, sarà *G* l' incontro del piano ortografico colla paralella alla *I — O* condotta pel punto della direttrice in cui è passato il punto *D*; e per conseguenza *G* sarà anche un punto della traccia dimandata.

Ma, per essere *cf* paralella alla *CF*, ed *fg* paralella ed eguale alla verticale *cd*, il punto *g* sarà pel *d* ciò che è *G* pel *D*; adunque ecc.

Corollario. Se l' angolo $\Delta EA$ sarà semiretto, come succede quando le rette generatrici siano paralelle alla direzione ordinaria dei raggi di luce, si avrà $EA = A\Delta = AC$; e però, se la curva *BmM* sarà eguale perfettamente alla *LTB*, risulterà $GF = CD = Em$;

quindi, in questo caso, si guadagnerà in semplicità, descrivendo la linea *MmB* in vece della *BTL*; giacchè, condotta *AP* paralella alla *O*, e prese nelle verticali *EG*, *eg*, - - le parti *FG*, *fg*, - - eguali alle altre loro parti *Em*, *ex*, - -, avransi immediatamente in *G*, *g*, - - i punti della traccia richiesta.

## LEMMA 29.

*Essendo le rette* AF, AN, FN (*tav. XVIII, fig.* 182) *eguali alle* af, an, fn, *ciascuna a ciascuna, le* FP, fp *perpendicolari alla* fF, *e gli angoli* PFN, pfn *fra loro eguali, le due rette* AP, ap *perpendicolari alle* FP, fp *saranno parti di una medesima retta.*

I due triangoli *AFN*, *afn* eguali perfettamente danno l'angolo $AFN = afn$; e però sarà anche *AFP* eguale all' *afp*, per essere *PFN* eguale al *pfn*; quindi i due triangoli rettangoli *AFP*, *afp*, i quali hanno le ipotenuse eguali, non che gli angoli *AFP*, *afp*, danno *FP* eguale ad *fp*, o sia le *AP*, *ap* fra loro per diritto, come ecc.

OSSERVAZIONE. Così se saranno le *BF*, *BN* eguali alle *bf*, *bn*, e le *BQ*, *bq* perpendicolari alle *PQ*, *pq*, ovvero alla medesima *pq*, anche queste coincideranno, e per le stessissime ragioni.

## LEMMA 30.

*Di una superficie di rotazione che ha l' asse verticale, conoscendosi la sua ortografia e quella di una sua apertura qualsivoglia, trovare l' icnografia di questa.*

Sia (fig. 93) *MVL* l' ortografia della superficie, ed *fkr* quella della sua apertura, ed *ML* la retta comune ai soliti piani coordinati.

Si tiri l' orizzontale *GH*, la verticale *Ir*, descrivasi l' arco circolare *hRF* col centro *T* e col raggio eguale alla *GH*, e si avrà in *R* un punto della icnografia dimandata.

L' icnografia del punto della superficie di rotazione, il quale ha l' ortografia in *r*, deve essere evidentemente nella periferia orizzontale avente il centro in *T* ed il raggio eguale alla *GH*; sarà adunque nella *hRF* descritta col centro *T* alla distanza eguale alla *GH*. Ma debb' essere anche nella verticale *Ir*; quindi si troverà in *R* segamento di queste due linee, come ecc.

COROLLARIO. Se l' apertura avente per ortografia *dkf*, in vece di essere posteriore al piano della sezione fatta alla superficie pel suo asse e paralella al piano ortografico, cioè *MVL*, come ho tacitamente supposto qui sopra, fosse anteriore al medesimo piano, l' icnografia del punto che ha per ortografia *r* sarebbe l' altro segamento della retta *Ir* coll' arco descritto col centro *T* e col raggio eguale alla *GH*.

OSSERVAZIONE. Se si conoscesse l' icnografia *RKF*, e si volesse l' ortografia; descritto l' arco *Rh* facendo centro in *T* e col raggio *TR*, tirate le *hH*, *rR* paralelle alla *VT*, indi l' orizzontale *GH*, sarebbe l' incontro *r* evidentemente un punto dell' ortografia richiesta.

## Lemma 31.

*Trovare una sezione orizzontale della superficie spirale generata da una data linea piana, conoscendosi l'elice percorsa dal punto individuato del piano della generatrice medesima, e supposto che l'elice stessa sia ordinaria ed abbia l'asse verticale.*

Si vegga la figura 104, tavola XI.

Si tiri *Bb* verticale, *b*1 orizzontale, e si descriva la linea 413 eguale perfettamente alla generatrice, e che *o* sia il punto individuato di essa che percorre l'elice *DBC*–*dbc*: fatto ciò, si conducano le verticali *Dd*, 6*o*5, e l'orizzontale *c*52, e si seghi il prolungamento *DF* della *AF* eguale alla 25, ed il punto *F* apparterrà alla linea *FE*7 eguale perfettamente alla sezione orizzontale della superficie spirale fatta ad essa dal piano orizzontale passante per *b*1.

S' immagini trasportata la superficie 316 per modo che il punto *o* cada nel *D*—*d*, la retta *o*1 secondo la *DF*—*ds*, e la *o*3 secondo *D*—*dc*: in questa situazione, per essere *o*1 = *ce* = *de*, il punto 5 coinciderà coll' *e*, la retta 52 sarà nel piano orizzontale che passa per 1*b*, ed avrà per icnografia *DF*; e però il punto *F* icnografia della nuova posizione del punto 2, il quale si trova e nel detto piano orizzontale e nella superficie spirale, apparterrà all' icnografia della sezione fatta alla medesima superficie dal piano orizzontale condotto lungo 1*b*. Ma l' icnografia di questa sezione eguaglia perfettamente la sezione medesima; adunque ecc.

Corollario 1. Se la retta *c*2 incontrasse la linea 429 anche in 9, segato *D*9 eguale alla 59, sarebbe 9 un altro punto della sezione richiesta. Fatto *BE* eguale al 10, sarà *E* un punto della linea medesima: così, condotta l' orizzontale *d*64, e segato il prolungamento *C*7 della *AC* eguale alla 46, il punto 7 apparterrà anch'esso alla linea in quistione.

Corollario 2. Se la retta 10 sarà un asse della linea generatrice 429, la *ABE* lo sarà della linea *FE*7 richiesta; per cui descritta la parte di questa, che cadrà da una banda della retta *AE*, agevolmente descriverassi anche l' altra senza usare la regola esposta.

Osservazione. Essendo ordinaria l' elice che percorre il punto individuato del piano della generatrice della superficie spirale, tutte le sezioni orizzontali della superficie stessa saranno fra loro eguali; e però anche la traccia icnografica di essa superficie sarà eguale perfettamente alla *FE*7.

## Lemma 32.

*Data la generatrice* ABC *(fig. 106) di una superficie de' canali, non che la* EFLG *(fig. 105) sua ortografia, cioè la direttrice* EMF *percorsa dal punto di mezzo dell' orizzontale* AC, *e la sua paralella* LHG *rappresentante la parte superiore della superficie medesima, trovare l' intersecazione fatta ad essa superficie dal piano perpendicolare all' ortografico e condotto lungo la retta* HM *qualunque.*

Si tirino le 1*b*, 2*d*, 3*f*, -- normali alla curva *GHL*, le 1*a*, *c*2, *s*3, -- perpendicolari alla *HM*; facciasi *Bg* = *b*1, *Bl* = *d*2, *Bn* = *f*3, --, e si

conducano le $gh$, $lm$, $nr$, -- paralelle alla $AD$; indi si seghino $a1 = gh$, $c2 = lm$, $s3 = nr$, --, ed i punti $a$, $c$, $s$, -- evidentemente saranno della sezione $HacsN$ dimandata, supposto adattata al piano ortografico col rotare attorno alla $HM$.

Suppongasi segata la superficie dal piano che passa per la $3f$ ed è perpendicolare all' ortografico; la sezione sarà eguale perfettamente alla linea $ABC$; e però condotta dal punto 3 la perpendicolare al piano dell' ortografia, ed estesa sino alla superficie, sarà essa eguale alla $nr$, per essere $Bn = f3$. Quindi, essendosi fatto $s3$ perpendicolare alla $HM$ ed eguale alla $rn$, sarà $s$ un punto della sezione dimandata; ma ciò che si è detto del punto $s$ vale per gli $a$, $c$, --; adunque la linea $Hac$, -- sarà, come ho asserito, la sezione richiesta.

## Lemma 33.

*Data l'elice direttrice di una superficie elicoidica e la linea generatrice della medesima superficie, trovare la sua traccia icnografica.*

Sia (fig. 109) $LDE$ l' ortografia, ed $Lde$ l' icnografia dell' elice direttrice, ed $XRZ$ la linea (fig. 108) generatrice, ed $Y$ il punto di questa che percorre la $ADE - Ade$, cioè il punto di mezzo della $XZ$.

Facciasi $dAD$ perpendicolare alla $ML$ comune sezione ai soliti due piani coordinati, la $dH$ normale in $d$ alla $Lde$, $dK$ eguale alla $AD$, l' angolo $dNK$ eguale a quello fatto col piano icnografico dalla tangente l' elice in $d - D$; tirisi $IdV$ tangente in $d$ l' icnografia $Lde$, $PQ$ perpendicolare alla $IV$, $YR$ alla $XZ$, $TY$ eguale alla $KN$, $SV$ paralella alla stessa $XZ$, in fine le $NQ$, $NP$ eguali amendue alla $ST$, e saranno $P$, $Q$ due punti della traccia dimandata.

Si sovrapponga $XRZ$ al piano icnografico ed in modo che la retta $SV$ cada sopra la sua eguale $QP$, e la $TY$ cada secondo la $NV$; in questa situazione la figura $XSRVZ$ sia rappresentata dalla $OQIPJ$, sarà $NV$ eguale alla $NK$, per essere $VN$ eguale alla $TY$, e questa alla $KN$.

Facendo rotare la figura $OIJ$ attorno alla retta $PQ$ di un angolo eguale al $VNK$, ed in maniera che $OQPJ$ si disponga sotto del piano icnografico, $V$ passerà nel punto $D - d$ dell' elice direttrice, la retta $OJ$ sarà nella orizzontale che ha l' icnografia in $dH$, ed il piano $OIJ$ rotante si troverà perpendicolare all' elice medesima; e però la linea $OIJ$ si confonderà colla generatrice della superficie elicoidica che passa pel punto $D - d$; quindi i due punti $P$, $Q$, per essere in questa linea generatrice e nel piano icnografico, saranno, come si è asserito, due punti della traccia icnografica della superficie elicoidica.

Osservazione. Condotta $dI$ tangente al punto $d$ dell' icnografia $Lde$, e la $dAD$ perpendicolare alla $ML$ asse; presa $bk$ eguale alla $DA$, e fatto l' angolo $bkn$ eguale a quello che fa col piano icnografico la tangente in $D - d$ dell' elice $Lde - LDE$, ed esteso il lato $nk$ sino ad incontrare $bn$ perpendicolare alla $bk$; e presa $dN$ eguale alla $bn$, e la $YT$ eguale alla $nk$, e tirata $PQ$ perpendicolare alla $dI$, e la $SV$ alla $YR$; in ultimo fatte $QN$, $NP$ eguali alla $ST$, avransi i punti $P$, $Q$ della traccia in quistione. In un modo simile si potranno avere anche gli altri.

Se le tangenti l' elice faranno angoli eguali col piano icnografico, come succede per le volte delle ordinarie scale a chiocciola, gli angoli analoghi al $bkn$ riesciranno tutti fra loro eguali, e però fra loro paralelle tutte le rette simili alla $nk$.

# NOTA

## DELLE OPERE PUBBLICATE SUI CONTORNI DELLE OMBRE.

---

*Mémoire sur les Propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes*, etc. Par Gaspard Monge. Si trova nella collezione intitolata : *Mémoires de mathématique et de physique*. Paris, 1775.

*La science des Ombres par rapport au dessin*. Par M. Dupain l'aîné. Paris, 1786. La parte di quest' opera relativa ai contorni delle ombre non merita di esser letta.

*Leçons élémentaires des Ombres*. Par M. de la Gardette. Paris, 1797.

*Regole del Chiaro-oscuro in architettura* di Carlo Amati. Milano, 1802.

*Saggio teorico-pratico intorno alla determinazione delle ombre nei diversi soggetti d' architettura geometrica*. Firenze, 1805.

*Problema grafico* : così intitolò il sig. Tramontini un eccellente suo opuscolo inserito nella prima parte del tomo pubblicato nel 1807 dalla Società Italiana delle Scienze.

*Delle Projezioni grafiche e delle loro principali applicazioni. Trattato teorico-pratico*, ecc. del medesimo autore. Il capo sesto del libro primo della seconda parte di quest'opera è un complesso di proposizioni relative ai contorni delle ombre. Modena, 1811.

*Teoria dell' ombreggiare e metodo di acquerellare* di Leandro Marconi, architetto e professore di ornato nell'Accademia di belle arti in Bologna. Bologna, 1811.

*Études d'Ombres, à l'usage des écoles d'architecture*. Par C. Stanislas l'Eveillé, ingénieur en chef des ponts et chaussées. Paris, 1812.

*Geometria descrittiva* di Francesco Taccani. L' arte di ombreggiare gli oggetti è una parte di quest' opera. Milano, 1813.

Nel secondo tomo dell' opera intitolata: *Correspondance sur l'École polytechnique* si trova un' applicazione della *Théorie des ombres au dessin des machines* fatta dai signori Hachette e Françai s. Paris, 1813.

*Facilis et universalis delineatio geometrica umbrarum, quas corpora rotunda præsertim architectonica vel in semetipsis patiuntur, vel sibi invicem inferunt, vel aliunde mutuantur, lumine a puncto unico ubivis posito dimanante.*

Dissertatio lecta coram Instituto scientiarum a J. B. Magistrini pontificii archigymnasii bononiensis superioris matheseos professore. Bononiæ, anno MDCCCXVI.

---

Osservazione. Sebbene il lettore, fornito di tutte le operette qui citate, possa vedere a chi si debbono gli enunciati e le soluzioni di quelle proposizioni relative ai contorni delle ombre che furono trattate prima di quest' epoca; non ostante, in altra occasione più opportuna della presente, penso di pubblicare la breve istoria dei progressi di questa nuova ed interessante scienza, affinchè possa chiunque facilissimamente soddisfare questa nobile curiosità.

# APPENDICE ALL' ERRATA CORRIGE.

| ag. | lin. | ERRORI. | CORREZIONI. |
|---|---|---|---|
| 14 | 16 | $AEBD$ sia | $AEBD$ (fig. 8) sia |
| 17 | 21 | un asse comune | l' asse reale comune |
| 21 | 32 | ventiquattresimo | quindicesimo |
| 23 | 32 | $Mc$ | $Mi$ |
| 34 | 35 | ciò, si | ciò, tirisi $I'AI$ parallela alla $I$, si |
| 37 | 22 | $B'P'$ | $B'L'$ |
| 60 | 22 | $acd$ | $acr$ |
| 65 | 35 | $CF$, | $CD$, $CF$, |
| 67 | 17 | $f$ | $p$ |
| | 33 | ortografie, e $v$, $bac$ le icnografie | icnografie, e $v$, $bac$ le ortografie |
| 72 | 29 | diciassettesimo | diciottesimo |
| 75 | 42 | ortografia | ombra |
| 78 | 17 | $IN$ | $In$ |
| 84 | 5 | , di cui parlerò | parlerò |
| 85 | 35 | $AB$ | $A'B'$ |
| | 41 | $d'Pd$, si | $d'Pd$ riferite al diametro $Pp$, si |
| 89 | 6 | $GH$ | $mH$ |
| 90 | 40 | $z, y, x$ | $z, x, y$ |
| 104 | 33 | $Fan$ | $FaN$ |
| 106 | 18 | alla $GH$, | alla $GE$, si tiri l' orizzontale $QZ$ a destra della $RP$ ed eguale alla $GB$ |
| | 19 | $Q$ e col raggio $OQ$. | $Z$ e col raggio $OZ$ |
| | 27 | nella proposizione | nell' osservazione 3 della proposizione |
| 107 | 17 | $BTL$ | $BTL$, (ciascuno degli archi descritti coi centri analoghi agli $F, f$, -- segherà la linea $TSV$ in due punti, perchè le ordinate $CD$, $cd$ sono in generale maggiori delle rette analoghe alle $FG$, $fg$, - - ) |
| | 34 | asse; | l' asse medesimo; |
| 109 | | $Kb$ | $Ib$ |
| 112 | 6 | duodecima | undecima |
| 113 | 3 | anzidetta | duodecima |
| | 37 | e la parallela $DM - dn$ | e la parallela alla $DM - dn$ tirata da un punto della stessa generatrice |
| 130 | 29 | Si prenda $3b = BM$ | si prenda $9b = BL$ |
| | 29 | $3b$ | $BM$ |
| | 31 | . Così, si seghi $nc = BP$, col centro $c$ e col raggio $cn$ facciasi | Così col medesimo centro $b$ e col raggio $BP$, coroll. 4, prop. 38, parte terza |
| | 34 | *si levi* | |
| 132 | 13 | prop. seconda | prop. prima |
| | 24 | trentesimanona | trentesimottava |
| | 32 | e però unendo | e però, se il punto $I$ cadesse in $i$, unendo |
| 133 | 7 | si faccia l' angolo | si faccia la retta $bc'a'$ parallela alla $O$, l'angolo |
| | 9, 16 | $cedfiii$ - - | $c'd'fiii$ - - |
| | 20 | trentesimanona | quarantesima |
| | 22 | dell' altro modiglione | del piano dell' altro triglifo |
| | 25 | pel punto $\mu$ | per ambedue i punti $\mu$, $b$ |

Per evitare la confusione, nella quale si potrebbe cadere, si disegni anche l' icnografia del pezzo di cornice in quistione, e poi si determinino i contorni dimandati mediante l' osser. seconda, prop. sesta, parte terza, approfittando di tutte le simplificazioni che hanno luogo, osser. prima, prop. prima, parte anzidetta.

| ag. | lin. | ERRORI. | CORREZIONI. |
|---|---|---|---|
| | 37 | $yh$, $hx$ | $yh$, $hx$. Se la scozia non sarà segata dal piano orizzontale della $ny$, l' arco $st$ sarà una continuazione dell' $yx$. |
| 136 | 13 | | $EI$ esprime la solita $ML$ |
| 137 | 28 | trentesimaprima | vigesimanona |

| Pag. | lin. | ERRORI. | CORREZIONI. |
|---|---|---|---|
| 140 | 2 | $BV$ | $FV$ |
| 141 | 18 | fig. 111 | fig. 112 |
| | 26 | alla $ns$ | alla $ns$ ed uniscasi $IS$ |
| 144 | 6 | fa | fa coll' orizzonte |
| 146 | 2 | trentesimaquinta | quindicesima |
| 152 | 6 | congiungasi $U\Delta C=cp$ ; | congiungasi il segamento della $U\Delta C=cp$ [...] è più lontano dal punto $M$; |
| 154 | 7 | $TNG$ | $GMQ$ |
| | 8 | $O$ | $I$ |
| | 9 | altezza ripiano | altezza sopra il ripiano |
| 156 | 23 | -- 8 , 9 , -- | -- 6 , 7 , 8 , -- |
| | 33 | -- settimo , ottavo , -- | -- quinto , sesto , settimo , -- |
| 157 | 10 | $\Delta I$ , | $\Delta E$ , $\Delta I$ |
| 159 | 5 | *sino alla pag.* 161 *invece di* $I$, $O$ *leggasi* | $n$ , $m$ |
| 164 | 3 | le cui parallele tirate pel centro della prima sezione cadono nell' angolo | la cui parallela tirata pel centro della prim[...] sezione cade nell' angolo |
| 165 | 17 | e componendo nella risultante , | nella risultante componendo per l' elisse [...] dividendo per l' iperbola ; |
| 166 | 14 | l' ascissa | ascissa presa in quest' asse e dal centro |
| | 15 | ( fig. 165 ) | ( fig. 165 ) e $bd$ quello col quale una ta[...]gente deve fare un angolo dato |
| 167 | 12, 14 | $Vt'V'$ | $Vs'V'$ |
| | 36 | si ottiene | si ottengono |
| 173 | 16 | $E'F'$ | $C'F'$ |
| | 16, 17 | diametro | semidiametro |
| 177 | 18 | l' asse verticale | l' asse verticale nel piano ortografico |
| | 30 | $dkf$ | $rkf$ |
| 178 | 16 | 01 | 05 |
| | 23 | 9 | $9'$ |
| 179 | 18 | $dNK$ | $dKN$ |

nella fig. 27 all' altro termine dell' arco $CD$ si legga $E$
28 la retta $dp'$ deve cadere nell' angolo $pdM$
67 la retta $BR$ deve passare sotto il centro $F$
92 le $x$, $y$, $z$ più vicine al $\beta$ debbono esser accentate
118 s' intenda la cifra 9 al punto comune ai prolungamenti delle $xv$, $Bb$
120 manca la retta $c'd'$ che ha il termine $c'$ nella -- $nc$ --, e l' altro nella $dfi$; e manca anche la lettera $l$ dove l' orizzontale $hg$ incontra la verticale $y4$
122 il punto $i$ cadrà fra 5 ed $N$
129 invece di $e$ si legga $c$
169 ove si segano le rette $cn$, $rd$ vi dev' essere $x$

Allorchè in quest' opera si suppongano date due projezioni di una linea, per es. l' ortografia e l' icnografia, come si fa alla linea trentunesima della pag. 3, s' intendono dati non solo i disegni di esse projezioni, ma anche l' ordine successivo, o sia il verso, a seconda del quale si debbono considerare i punti delle medesime projezioni, onde indicare quella tale obbiettiva; e per conseguenza non è indifferente l' ordine col quale si debbono scrivere le lettere poste sopra due projezioni di una obbiettiva, quando esse si scrivono per indicare l' obbiettiva medesima; di modo che, ad esempio, la spirale indicata dalla scrittura $EFG-ABC$ ( fig. 20 ) è diversa da quella indicata dalla consimile $EFG-ACB$, indicando la prima una spirale avvolta al cilindro verticale avente per base il cerchio $ABC$ più che essa si avvolge al medesimo pel verso $tBC$ --, mentre l' altra indica una spirale bensì avvolta anch' essa allo stesso cilindro, ma pel verso $ACB$ -- affatto contrario. Pertanto credo bene di avvertire anche gli errori seguenti, i quali potrebbero cagionare oscurità:

| Pag. | lin. | Errori | Correzioni |
|---|---|---|---|
| 61 | 4 | $ghl$ | $lhg$ |
| 62 | 4 | $ghl$ | $lhg$ |
| 105 | 36 | $RKF$ | $FKR$ |
| 116 | 7 | $EAe$ | $eAE$ |
| 177 | 35 | $RKF$ | $FKR$ |

J. Bias inc.

9
10
11
12
13
14
17
19

15

16

29

A Bias inc

IV.
24.
26.
25.
18
23.
23.
27.
28.
20.
A. Bias. inv.

A. Bias inc.

A. Bias inc

A. Bias inc.

VIII.

A Eia. inc

78.
76.
77.
81.
82.
84.
75.
80.
87.
83.
96.
85.
86
79
98
A. Bras inc.

X.
91
89.
88.
90.
92.
93.
94.
95.
100.
101.
99.
109.
103.
110.
A.Bias. inc

A. Bias inc.

A. Bias inc.

130. 132. 133. 137. 135. 134. 136. 153. 154. 177.

A. Bias. inc.

A.Bias. inc.

A. Bias inc

148.

182.

149.

150.

179.

151.

152.